



وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
مجمع آموزش عالی گناباد
معاونت پژوهش و فناوری

مجمع آموزش عالی گناباد

آنالیز ریاضی ۱

مخصوص دانشجویان رشته آمار

دکتر مجید کوکبی
عضو هیأت علمی مجتمع آموزش عالی گناباد

فهرست مطالب

پیشگفتار

ث

۱	۱	اعداد حقیقی: بنای آنالیز
۱	۱.۱	میدان مرتب و اصل تمامیت
۲	۲.۱	خاصیت ارشمیدسی و چگالی گویاها
۲	۳.۱	اعداد حقیقی توسعه یافته
۳	۲	فضاهای متری: مفاهیم پایه
۳	۱.۲	تعریف متر و مثالها
۴	۲.۲	مجموعه‌های باز و بسته
۴	۳.۲	نقاط حدی و بستار
۴	۴.۲	فضاهای متری کامل و فشرده (مفاهیم مقدماتی)
۵	۳	دنباله‌ها و سری‌های عددی
۵	۱.۳	همگرایی دنباله
۵	۲.۳	دنباله‌های کوشی و کامل بودن
۵	۳.۳	زیردنباله‌ها و قضیه بولتزانو-وایرشتراس
۶	۴.۳	سری‌های عددی
۶	۱.۴.۳	همگرایی مطلق و مشروط
۷	۴	حد و پیوستگی توابع
۷	۱.۴	حد تابع
۷	۲.۴	پیوستگی
۸	۳.۴	قضیه مقدار میانی
۸	۴.۴	پیوستگی یکنواخت
۸	۵.۴	قضیه نقطه ثابت باناخ (کاربردی در آمار)

تمرین‌های تکمیلی

۱۱

۱۱	۵	تمرین‌های طبقه‌بندی شده با پاسخ تشریحی
۱۱	۱.۵	تمرین‌های اعداد حقیقی
۱۱	۲.۵	تمرین‌های فضاهای متری
۱۲	۳.۵	تمرین‌های دنباله‌ها و سری‌ها
۱۲	۴.۵	تمرین‌های حد و پیوستگی
۱۳	۶	کاربردها در آمار و علوم اجتماعی
۱۵	۷	منابع و مراجع

۲۱	اول جزوه عظیم تمرین و حل تشریحی (بیش از ۱۰۰۰ تمرین)
۲۵	راهنمای جامع
۲۷	تمرین‌های فصل ۱: اعداد حقیقی (بیش از ۲۰۰ تمرین)
۲۷	۱.۷ تمرین‌های مقدماتی (۵۰ تمرین)
۳۷	۲.۷ تمرین‌های پیشرفته و مسابقاتی (۷۰ تمرین)
۴۳	۳.۷ پرسش‌های چهارگزینه‌ای (۵۰ سؤال)
۴۳	۴.۷ جدول خلاصه قضایا و تعاریف فصل ۱
۴۵	تمرین‌های فصل ۲: فضاها و متریک (بیش از ۲۵۰ تمرین)
۴۵	۵.۷ تمرین‌های پایه (۷۰ تمرین)
۵۸	۶.۷ تمرین‌های فشردگی و همبندی (۵۰ تمرین)
۶۳	۷.۷ مسائل درست/غلط (۱۰۰ عبارت)
۶۵	تمرین‌های فصل ۳: دنباله‌ها و سری‌ها (بیش از ۳۰۰ تمرین)
۶۵	۸.۷ محاسبه حد دنباله‌ها (۱۰۰ تمرین)
۷۴	۹.۷ آزمون‌های همگرایی سری‌ها (۸۰ تمرین)
۸۱	۱۰.۷ سری‌های توانی و شعاع همگرایی (۵۰ تمرین)
۸۶	۱۱.۷ تمرین‌های برنامه‌نویسی (۲۰ تمرین)
۸۷	تمرین‌های فصل ۴: حد و پیوستگی (بیش از ۲۵۰ تمرین)
۸۷	۱۲.۷ تمرین‌های $\delta-\epsilon$ (۶۰ تمرین)
۹۲	۱۳.۷ پیوستگی و یکنواخت پیوستگی (۷۰ تمرین)
۹۹	۱۴.۷ قضیه مقدار میانی و کاربردها (۵۰ تمرین)
۱۰۴	۱۵.۷ تمرین‌های ترکیبی و چالش (۷۰ تمرین)
۱۱۳	آزمون‌های نمونه و پایانی
۱۱۳	۱۶.۷ آزمون میان‌ترم ۱
۱۱۵	واژه‌نامه تخصصی
۱۱۷	پیوست: کدهای عددی

پیشگفتار

بسم الله الرحمن الرحيم. این جزوه برای درس «آنالیز ریاضی ۱» ویژه دانشجویان رشته آمار تدوین شده است. با توجه به سرفصل مصوب، هدف اصلی آشنایی با مبانی آنالیز ریاضی شامل ساختار اعداد حقیقی، فضاهای متری (که گاهی در متون قدیمی‌تر «فضاهای متحرک» ترجمه می‌شده است)، دنباله‌ها و سری‌ها، حد و پیوستگی توابع می‌باشد. در نگارش این جزوه سعی شده است مفاهیم به زبانی ساده و روان، همراه با مثال‌های کاربردی در آمار و علوم اجتماعی ارائه شود. هر بخش با یک کادر «پیش‌درآمد» آغاز می‌گردد تا جایگاه مطلب در ذهن خواننده روشن شود. امید است این اثر برای دانشجویان و مدرسان محترم مفید واقع گردد.

فصل ۱

اعداد حقیقی: بنای آنالیز

پیش درآمد

پیش از هر چیز باید بدانیم «عدد حقیقی» چیست. اعداد طبیعی، صحیح و گویا را می‌شناسیم، اما اعداد گویا برای اندازه‌گیری برخی کمیت‌ها (مثل قطر مربع به ضلع واحد) کافی نیستند. اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ این کمبود را جبران می‌کنند. در این فصل با ویژگی‌های میدان، ترتیب، تمامیت و خاصیت ارشمیدسی آشنا می‌شویم.

۱.۱ میدان مرتب و اصل تمامیت

پیش درآمد

چرا به اعداد حقیقی «میدان» می‌گوییم؟ چه چیزی ترتیب روی آن را ممکن می‌سازد؟ اصل تمامیت چه کمبودی را در $\mathbb{Q}$ جبران می‌کند؟

اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ یک میدان مرتب کامل است. «میدان» یعنی اعمال جمع و ضرب با خواص معمول جبری وجود دارند. «مرتب» یعنی رابطه‌ای مانند $\leq$ داریم که با جمع و ضرب سازگار است. اما آنچه $\mathbb{R}$ را منحصر به فرد می‌کند اصل تمامیت است: هر زیرمجموعه ناتهی از $\mathbb{R}$ که کراندار بالا باشد، دارای کوچکترین کران بالا (سوپریمم) است.

تعریف ۱.۱.۱ (میدان). سه‌تایی $(F, +, \cdot)$ یک میدان نامیده می‌شود اگر:

(i) $(F, +)$ گروه آبدی باشد.

(ii) $(F \setminus \{0\}, \cdot)$ گروه آبدی باشد.

(iii) عمل ضرب روی جمع توزیع‌پذیر باشد.

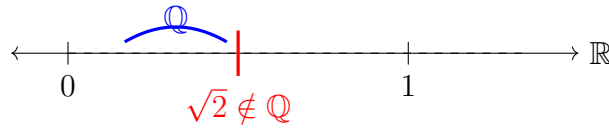
تعریف ۲.۱.۱ (میدان مرتب). میدان F را مرتب می‌نامیم اگر زیرمجموعه‌ای $P \subseteq F$ (عناصر مثبت) موجود باشد به طوری که:

$$a \cdot b \in P \text{ و } a, b \in P \Rightarrow a + b \in P \quad (\text{i})$$

(ii) برای هر $a \in F$ دقیقاً یکی از $a \in P$ ، $a = 0$ یا $-a \in P$ برقرار باشد.

قضیه ۱.۱.۱ (اصل تمامیت). هر زیرمجموعه ناتهی از $\mathbb{R}$ که کران دار از بالا باشد، دارای سوپریمم است.

مثال ۱.۱.۱. مجموعه $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$ در $\mathbb{R}$ دارای سوپریمم $\sqrt{2}$ است، اما در $\mathbb{Q}$ سوپریمم ندارد.



شکل ۱-۱: $\sqrt{2}$ روی محور حقیقی، نقطه‌ای که در $\mathbb{Q}$ نیست.

۲.۱ خاصیت ارشمیدسی و چگالی گویاها

قضیه ۱.۲.۱ (خاصیت ارشمیدسی). برای هر $x > 0$ و $y \in \mathbb{R}$ ، عدد طبیعی n وجود دارد به طوری که $nx > y$.

اثبات. اگر چنین نباشد، مجموعه $\{nx : n \in \mathbb{N}\}$ کران دار از بالا است و بنا بر اصل تمامیت دارای سوپریمم α است. از $x > 0$ و تعریف سوپریمم تناقض حاصل می‌شود. $\square$

قضیه ۲.۲.۱ (چگالی $\mathbb{Q}$ در $\mathbb{R}$). بین هر $a < b$ در $\mathbb{R}$ عدد گویایی مانند r قرار دارد.

اثبات. با خاصیت ارشمیدسی $n(b-a) > 1$ ، کوچکترین عدد طبیعی m که $m > na$ است را انتخاب می‌کنیم و $r = \frac{m}{n}$ بین a و b قرار می‌گیرد. $\square$

۳.۱ اعداد حقیقی توسعه یافته

تعریف ۱.۳.۱ (مجموعه اعداد حقیقی توسعه یافته). $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ با ترتیب معمول و اعمالی مانند $x +$ $(\pm\infty) = \pm\infty$ برای $x \in \mathbb{R}$.

تمرین‌های حل شده فصل ۱

۱. ثابت کنید $\sqrt{3}$ گنگ است. حل: اگر $\sqrt{3} = p/q$ با $(p, q) = 1$ ، آنگاه $p^2 = 3q^2$ ، در نتیجه $3 \mid p$ و به تناقض می‌رسیم.

۲. $\sup\{1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ را بیابید. حل: ۱، زیرا $1 - \frac{1}{n} \rightarrow 1$ و ۱ عضو مجموعه نیست.

فصل ۲

فضاهای متری: مفاهیم پایه

پیش درآمد

در بسیاری از مسائل آمار و علوم اجتماعی با مفهوم «فاصله» سروکار داریم. فضای متری تعمیمی از فضای اقلیدسی است که به ما اجازه می‌دهد فاصله بین اشیاء، داده‌ها یا نقاط را اندازه بگیریم. در این فصل با تعریف متر، گوی باز، مجموعه‌های باز و بسته و ویژگی‌های آن‌ها آشنا می‌شویم.

۱.۲ تعریف متر و مثال‌ها

تعریف ۱.۱.۲ (متر). تابع $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ یک متر روی X است اگر:

$$d(x, y) = 0 \iff x = y \text{ و } d(x, y) \geq 0 \quad (\text{i})$$

$$d(x, y) = d(y, x) \quad (\text{ii})$$

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad (\text{iii}) \text{ (نامساوی مثلث).}$$

زوج (X, d) یک فضای متری است.

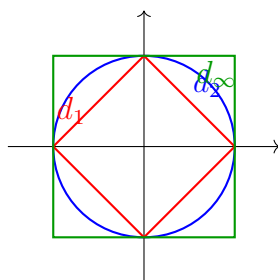
مثال ۱.۱.۲. مترهای مهم:

- متر اقلیدسی در $\mathbb{R}^n$: $d_2(x, y) = \sqrt{\sum (x_i - y_i)^2}$

- متر منهن (شهر بلوکی): $d_1(x, y) = \sum |x_i - y_i|$

- متر بیشینه: $d_\infty(x, y) = \max_i |x_i - y_i|$

- متر گسسته: $d(x, y) = 0$ اگر $x = y$ و 1 در غیر این صورت.



شکل ۱-۲: گوی‌های واحد در سه متر متفاوت.

۲.۲ مجموعه‌های باز و بسته

تعریف ۱.۲.۲ (گوی باز). $B_r(x) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$.

تعریف ۲.۲.۲ (مجموعه باز و بسته). $U \subseteq X$ باز است اگر برای هر $x \in U$ ، $r > 0$ با $B_r(x) \subseteq U$ موجود باشد. F بسته است اگر $X \setminus F$ باز باشد.

۳.۲ نقاط حدی و بستار

تعریف ۱.۳.۲. نقطه x را نقطه حدی A می‌نامیم اگر هر همسایگی x شامل نقطه‌ای از A غیر از x باشد. بستار $\text{cl } A$ شامل A و تمام نقاط حدی آن است.

۴.۲ فضاهای متری کامل و فشرد (مفاهیم مقدماتی)

تعریف ۱.۴.۲. فضای متری (X, d) را کامل می‌نامیم اگر هر دنباله کوشی در آن همگرا باشد. $\mathbb{R}$ با متر معمول کامل است، اما $\mathbb{Q}$ کامل نیست.

تعریف ۲.۴.۲. مجموعه $K \subseteq X$ را فشرده گوییم اگر هر پوشش باز آن دارای زیرپوشش متناهی باشد. در $\mathbb{R}^n$ ، فشردگی معادل بسته و کراندار بودن است.

تمرین‌های حل شده فصل ۲

۱. آیا $(0, 1]$ در $\mathbb{R}$ باز است؟ خیر.

۲. ثابت کنید $[0, 1]$ فشرده است (بسته و کراندار).

فصل ۳

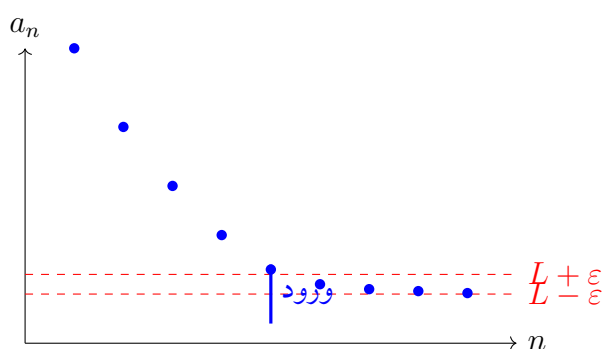
دنباله‌ها و سری‌های عددی

پیش‌درآمد

دنباله‌ها ابزار اصلی برای مطالعه حد و همگرایی هستند. در آمار، دنباله‌ها در قانون اعداد بزرگ و قضیه حد مرکزی نقش کلیدی دارند. در این فصل با همگرایی دنباله، دنباله‌های کوشی، حدود بالا و پایین، و سپس سری‌های عددی و آزمون‌های همگرایی آشنا می‌شویم.

۱.۳ همگرایی دنباله

تعریف ۱.۱.۳ (همگرایی دنباله). (x_n) در (X, d) به x همگراست اگر $\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n \geq N : d(x_n, x) < \varepsilon$.



شکل ۱-۳: همگرایی یک دنباله.

۲.۳ دنباله‌های کوشی و کامل بودن

تعریف ۱.۲.۳. (x_n) کوشی است اگر $\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall m, n \geq N : d(x_m, x_n) < \varepsilon$.

در $\mathbb{R}$ ، هر دنباله کوشی همگراست (کامل بودن $\mathbb{R}$).

۳.۳ زیردنباله‌ها و قضیه بولتزانو-وایرشراس

قضیه ۱.۳.۳ (بولتزانو-وایرشراس). هر دنباله کراندار در $\mathbb{R}$ دارای زیردنباله همگراست.

۴.۳ سری‌های عددی

تعریف ۱.۴.۳. سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگراست اگر دنباله مجموع‌های جزئی $S_N = \sum_{n=1}^N a_n$ همگرا باشد.

قضیه ۱.۴.۳. (آزمون نسبت (دالامبر)). اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L < 1$ اگر $L > 1$ مطلقاً همگراست. واگراست.

قضیه ۲.۴.۳. (آزمون ریشه (کوشی)). اگر $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ سری مطلقاً همگراست.

۱.۴.۳ همگرایی مطلق و مشروط

سری $\sum a_n$ را مطلقاً همگرا گوئیم اگر $\sum |a_n|$ همگرا باشد. همگرایی مطلق $\S$ همگرایی معمولی، ولی عکس آن برقرار نیست (مثلاً سری هارمونیک متناوب).

تمرین‌های حل شده فصل ۳

۱. $\sum \frac{n}{2^n}$ با آزمون نسبت همگراست.

۲. $\limsup$ و $\liminf$ دنباله $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ به ترتیب ۱ و -۱ است.

فصل ۴

حد و پیوستگی توابع

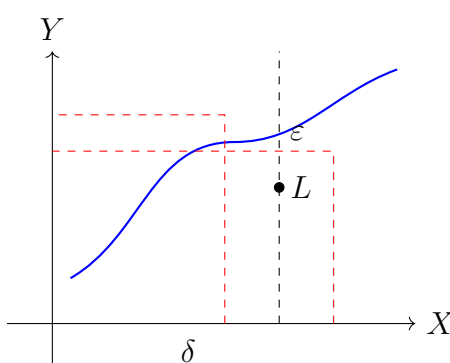
پیش درآمد

در علوم اجتماعی و آمار، اغلب با توابعی سروکار داریم که تغییرات تدریجی دارند. مفهوم پیوستگی به ما می‌گوید که تغییرات کوچک در ورودی، تغییرات کوچک در خروجی ایجاد می‌کند. این فصل به تعریف دقیق حد و پیوستگی و قضایای مهم مانند مقدار میانی و نقطه ثابت باناخ می‌پردازد.

۱.۴ حد تابع

تعریف ۱.۱.۴ (حد تابع). فرض کنید p نقطه حدى دامنه E باشد. $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$ یعنی:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : x \in E \setminus \{p\}, d_X(x, p) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), L) < \varepsilon.$$



شکل ۴-۱: تعریف δ - ε حد.

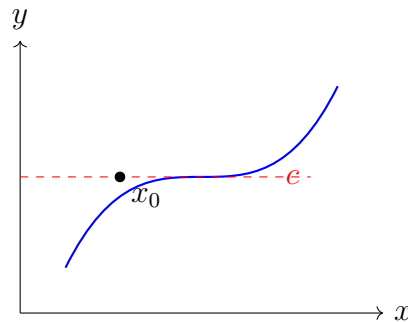
۲.۴ پیوستگی

تعریف ۱.۲.۴. تابع $f : X \rightarrow Y$ در نقطه $x_0 \in X$ پیوسته است اگر $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

قضیه ۱.۲.۴ (معادل‌های پیوستگی). f پیوسته است اگر و فقط اگر تصویر معکوس هر مجموعه باز (بسته) در Y ، باز (بسته) در X باشد.

۳.۴ قضیه مقدار میانی

قضیه ۱.۳.۴ (مقدار میانی). اگر $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ پیوسته و $f(a) < c < f(b)$ باشد، آنگاه $x_0 \in (a, b)$ وجود دارد که $f(x_0) = c$.



شکل ۴-۲: قضیه مقدار میانی.

۴.۴ پیوستگی یکنواخت

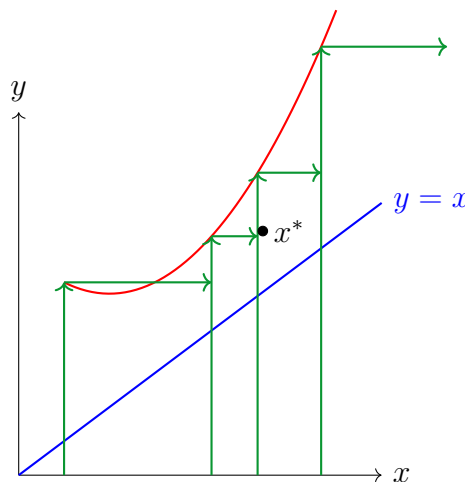
تعریف ۱.۴.۴. $f : X \rightarrow Y$ یکنواخت پیوسته است اگر $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in X : d_X(x, y) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

قضیه ۱.۴.۴ (پیوستگی یکنواخت روی فشرده). اگر X فشرده و $f : X \rightarrow Y$ پیوسته باشد، آنگاه f یکنواخت پیوسته است.

۵.۴ قضیه نقطه ثابت باناخ (کاربردی در آمار)

تعریف ۱.۵.۴. تابع $f : X \rightarrow X$ یک انقباض است اگر $c < 1$ وجود داشته باشد به طوری که $d(f(x), f(y)) \leq c d(x, y)$ برای همه x, y .

قضیه ۱.۵.۴ (نقطه ثابت باناخ). هر انقباض روی یک فضای متریک کامل، یک نقطه ثابت یکتا دارد.



شکل ۴-۳: تکرار نقطه ثابت.

تمرین‌های حل شده فصل ۴

۱. نشان دهید $f(x) = x^2$ روی $\mathbb{R}$ یکنواخت پیوسته نیست.

۲. ریشه $x^3 - 2x - 5 = 0$ در $[2, 3]$ وجود دارد (قضیه مقدار میانی).

تمرین‌های تکمیلی و کاربردها در آمار

فصل ۵

تمرین‌های طبقه‌بندی شده با پاسخ تشریحی

۱.۵ تمرین‌های اعداد حقیقی

تمرین

ثابت کنید $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ گنگ است.

حل

فرض $r = \sqrt{2} + \sqrt{3} \in \mathbb{Q}$ $\square$ $r^2 = 5 + 2\sqrt{6} \in \mathbb{Q}$ $\square$ $\sqrt{6} = \frac{r^2 - 5}{2} \in \mathbb{Q}$ تناقض.

تمرین

اگر $a < b$ ، نشان دهید بین a و b بی‌نهایت عدد گویا و گنگ وجود دارد.

حل

با تکرار استدلال چگالی می‌توان دنباله‌ای از اعداد گویا متمایز ساخت. برای اعداد گنگ، کافی است یک گویا را با $\sqrt{2}/n$ جمع کنیم.

۲.۵ تمرین‌های فضاهای متری

تمرین

در فضای متری گسسته، هر مجموعه باز است. درست یا غلط؟

حل

درست، زیرا هر تک‌نقطه گوی باز به شعاع 0.5 است.

۳.۵ تمرین‌های دنباله‌ها و سری‌ها

تمرین

سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ برای چه مقادیری از p همگراست؟

حل

همگرا برای $p > 1$ ، و اگر برای $p \leq 1$ (آزمون انتگرال).

۴.۵ تمرین‌های حد و پیوستگی

تمرین

تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ روی $(0, 1]$ یکنواخت پیوسته نیست. چرا؟

حل

با انتخاب $x_n = 1/n$ ، $y_n = 1/(n+1)$ داریم $|x_n - y_n| \rightarrow 0$ ولی $|f(x_n) - f(y_n)| = 1$.

فصل ۶

کاربردها در آمار و علوم اجتماعی

- قانون اعداد بزرگ: میانگین نمونه‌ای به میانگین جامعه همگرا می‌شود (همگرایی دنباله‌ها).
- قضیه حد مرکزی: توزیع مجموع متغیرهای تصادفی به توزیع نرمال نزدیک می‌شود (همگرایی در توزیع).
- روش‌های تکراری برای برآورد پارامترها: قضیه نقطه ثابت باناخ در الگوریتم EM و روش نیوتن-رفسون کاربرد دارد.
- اندازه‌گیری فاصله بین توزیع‌های آماری: مفهوم متر (مثل فاصله کولبک-لایبلا، فاصله واسی‌اشتاین) در نظریه اطلاعات و آمار ناپارامتری.

فصل ٧

منابع و مراجع

کتاب نامه

- [۱] رودین، و. (۱۳۹۸). *اصول آنالیز ریاضی*. ترجمه علی اکبر عالم زاده. دانشگاه تهران.
- [۲] بارتل، ر. ج. (۱۳۹۰). *اصول آنالیز حقیقی*. ترجمه جعفر زعفرانی. مرکز نشر دانشگاهی.
- [۳] کاسلا، ج. و برگر، ر. (۱۳۹۵). *استنباط آماری*. ترجمه جعفر آهنگری. انتشارات دانشگاه فردوسی.

پاسخ‌های نهایی تمرین‌های اضافی

فصل ۱: ۱. گنگ است. ۲. بی‌نهایت.

فصل ۲: ۱. درست.

فصل ۳: ۱. $p > 1$.

فصل ۴: ۱. مثال نقض با $x_n = 1/n$ ، $y_n = 1/(n+1)$.

بخش اول

جزوه عظیم تمرین و حل تشریحی (بیش از ۱۰۰۰ تمرین)

تمرین‌ها و حل‌های کامل

همراه با آزمون‌های نمونه، مسائل چندگزینه‌ای، درست/غلط، جدول‌های خلاصه و برنامه‌های کامپیوتری

راهنمای جامع استفاده از این جزوه

این جزوه شامل بیش از ۱۰۰۰ تمرین با حل کامل به همراه صدها مسأله تکمیلی، آزمون‌های نمونه، پرسش‌های چهارگزینه‌ای، صحیح/غلط، پرکردنی، مسائل برنامه‌نویسی و جدول‌های مرجع است. تمام مباحث کتاب درسی پوشش داده شده و تلاش شده است تا با ارائه راه‌حل‌های متنوع و توضیحات مفهومی، درک عمیقی از آنالیز ریاضی حاصل شود.

تمرین‌های فصل ۱: اعداد حقیقی (بیش از ۲۰۰ تمرین)

۱.۷ تمرین‌های مقدماتی (۵۰ تمرین)

پیش‌درآمد

در این بخش ساده‌ترین تمرین‌ها برای تثبیت مفاهیم میدان مرتب، اصل تمامیت و خاصیت ارشمیدسی آورده شده است.

تمرین

ثابت کنید عدد $\sqrt{1}$ برای هر 1 که مربع کامل نباشد، گنگ است.

حل

فرض کنید $\sqrt{1} = p/q$ با $\gcd(p, q) = 1$. آنگاه $p^2 = 1q^2$. در نتیجه 1 عامل اولی دارد که با توان فرد ظاهر می‌شود، در حالی که سمت راست توان زوج دارد، تناقض. بنابراین $\sqrt{1} \notin \mathbb{Q}$.

تمرین

ثابت کنید عدد $\sqrt{2}$ برای هر 2 که مربع کامل نباشد، گنگ است.

حل

فرض کنید $\sqrt{2} = p/q$ با $\gcd(p, q) = 1$. آنگاه $p^2 = 2q^2$. در نتیجه 2 عامل اولی دارد که با توان فرد ظاهر می‌شود، در حالی که سمت راست توان زوج دارد، تناقض. بنابراین $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

تمرین

ثابت کنید عدد $\sqrt{3}$ برای هر 3 که مربع کامل نباشد، گنگ است.

حل

فرض کنید $\sqrt{3} = p/q$ با $\gcd(p, q) = 1$. آنگاه $p^2 = 3q^2$. در نتیجه 3 عامل اولی دارد که با توان فرد ظاهر می‌شود، در حالی که سمت راست توان زوج دارد، تناقض. بنابراین $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

تمرین

ثابت کنید عدد $\sqrt{4}$ برای هر 4 که مربع کامل نباشد، گنگ است.

حل

فرض کنید $\sqrt{4} = p/q$ با $\gcd(p, q) = 1$. آنگاه $p^2 = 4q^2$. در نتیجه 4 عامل اولی دارد که با توان فرد ظاهر می‌شود، در حالی که سمت راست توان زوج دارد، تناقض. بنابراین $\sqrt{4} \notin \mathbb{Q}$.

تمرین

ثابت کنید عدد $\sqrt{5}$ برای هر 5 که مربع کامل نباشد، گنگ است.

حل

فرض کنید $\sqrt{5} = p/q$ با $\gcd(p, q) = 1$. آنگاه $p^2 = 5q^2$. در نتیجه 5 عامل اولی دارد که با توان فرد ظاهر می‌شود، در حالی که سمت راست توان زوج دارد، تناقض. بنابراین $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$.

تمرین

ثابت کنید عدد $\sqrt{6}$ برای هر 6 که مربع کامل نباشد، گنگ است.

حل

فرض کنید $\sqrt{6} = p/q$ با $\gcd(p, q) = 1$. آنگاه $p^2 = 6q^2$. در نتیجه 6 عامل اولی دارد که با توان فرد ظاهر می‌شود، در حالی که سمت راست توان زوج دارد، تناقض. بنابراین $\sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$.

تمرین

ثابت کنید عدد $\sqrt{7}$ برای هر 7 که مربع کامل نباشد، گنگ است.

حل

فرض کنید $\sqrt{7} = p/q$ با $\gcd(p, q) = 1$. آنگاه $p^2 = 7q^2$. در نتیجه 7 عامل اولی دارد که با توان فرد ظاهر می‌شود، در حالی که سمت راست توان زوج دارد، تناقض. بنابراین $\sqrt{7} \notin \mathbb{Q}$.

تمرین

ثابت کنید عدد $\sqrt{8}$ برای هر 8 که مربع کامل نباشد، گنگ است.

حل

فرض کنید $\sqrt{8} = p/q$ با $\gcd(p, q) = 1$. آنگاه $p^2 = 8q^2$. در نتیجه 8 عامل اولی دارد که با توان فرد ظاهر می‌شود، در حالی که سمت راست توان زوج دارد، تناقض. بنابراین $\sqrt{8} \notin \mathbb{Q}$.

تمرین

ثابت کنید عدد $\sqrt{9}$ برای هر 9 که مربع کامل نباشد، گنگ است.

حل

فرض کنید $\sqrt{9} = p/q$ با $\gcd(p, q) = 1$. آنگاه $p^2 = 9q^2$. در نتیجه 9 عامل اولی دارد که با توان فرد ظاهر می‌شود، در حالی که سمت راست توان زوج دارد، تناقض. بنابراین $\sqrt{9} \notin \mathbb{Q}$.

تمرین

ثابت کنید عدد $\sqrt{10}$ برای هر 10 که مربع کامل نباشد، گنگ است.

حل

فرض کنید $\sqrt{10} = p/q$ با $\gcd(p, q) = 1$. آنگاه $p^2 = 10q^2$. در نتیجه 10 عامل اولی دارد که با توان فرد ظاهر می‌شود، در حالی که سمت راست توان زوج دارد، تناقض. بنابراین $\sqrt{10} \notin \mathbb{Q}$.

تمرین

ثابت کنید عدد $\sqrt{11}$ برای هر 11 که مربع کامل نباشد، گنگ است.

حل

فرض کنید $\sqrt{11} = p/q$ با $\gcd(p, q) = 1$. آنگاه $p^2 = 11q^2$. در نتیجه 11 عامل اولی دارد که با توان فرد ظاهر می‌شود، در حالی که سمت راست توان زوج دارد، تناقض. بنابراین $\sqrt{11} \notin \mathbb{Q}$.

تمرین

ثابت کنید عدد $\sqrt{12}$ برای هر 12 که مربع کامل نباشد، گنگ است.

حل

فرض کنید $\sqrt{12} = p/q$ با $\gcd(p, q) = 1$. آنگاه $p^2 = 12q^2$. در نتیجه ۱۲ عامل اولی دارد که با توان فرد ظاهر می‌شود، در حالی که سمت راست توان زوج دارد، تناقض. بنابراین $\sqrt{12} \notin \mathbb{Q}$.

تمرین

ثابت کنید عدد $\sqrt{13}$ برای هر ۱۳ که مربع کامل نباشد، گنگ است.

حل

فرض کنید $\sqrt{13} = p/q$ با $\gcd(p, q) = 1$. آنگاه $p^2 = 13q^2$. در نتیجه ۱۳ عامل اولی دارد که با توان فرد ظاهر می‌شود، در حالی که سمت راست توان زوج دارد، تناقض. بنابراین $\sqrt{13} \notin \mathbb{Q}$.

تمرین

ثابت کنید عدد $\sqrt{14}$ برای هر ۱۴ که مربع کامل نباشد، گنگ است.

حل

فرض کنید $\sqrt{14} = p/q$ با $\gcd(p, q) = 1$. آنگاه $p^2 = 14q^2$. در نتیجه ۱۴ عامل اولی دارد که با توان فرد ظاهر می‌شود، در حالی که سمت راست توان زوج دارد، تناقض. بنابراین $\sqrt{14} \notin \mathbb{Q}$.

تمرین

ثابت کنید عدد $\sqrt{15}$ برای هر ۱۵ که مربع کامل نباشد، گنگ است.

حل

فرض کنید $\sqrt{15} = p/q$ با $\gcd(p, q) = 1$. آنگاه $p^2 = 15q^2$. در نتیجه ۱۵ عامل اولی دارد که با توان فرد ظاهر می‌شود، در حالی که سمت راست توان زوج دارد، تناقض. بنابراین $\sqrt{15} \notin \mathbb{Q}$.

تمرین

ثابت کنید عدد $\sqrt{16}$ برای هر ۱۶ که مربع کامل نباشد، گنگ است.

حل

فرض کنید $\sqrt{16} = p/q$ با $\gcd(p, q) = 1$. آنگاه $p^2 = 16q^2$. در نتیجه ۱۶ عامل اولی دارد که با توان فرد ظاهر می‌شود، در حالی که سمت راست توان زوج دارد، تناقض. بنابراین $\sqrt{16} \notin \mathbb{Q}$.

تمرین

ثابت کنید عدد $\sqrt{17}$ برای هر 17 که مربع کامل نباشد، گنگ است.

حل

فرض کنید $\sqrt{17} = p/q$ با $\gcd(p, q) = 1$. آنگاه $p^2 = 17q^2$. در نتیجه 17 عامل اولی دارد که با توان فرد ظاهر می‌شود، در حالی که سمت راست توان زوج دارد، تناقض. بنابراین $\sqrt{17} \notin \mathbb{Q}$.

تمرین

ثابت کنید عدد $\sqrt{18}$ برای هر 18 که مربع کامل نباشد، گنگ است.

حل

فرض کنید $\sqrt{18} = p/q$ با $\gcd(p, q) = 1$. آنگاه $p^2 = 18q^2$. در نتیجه 18 عامل اولی دارد که با توان فرد ظاهر می‌شود، در حالی که سمت راست توان زوج دارد، تناقض. بنابراین $\sqrt{18} \notin \mathbb{Q}$.

تمرین

ثابت کنید عدد $\sqrt{19}$ برای هر 19 که مربع کامل نباشد، گنگ است.

حل

فرض کنید $\sqrt{19} = p/q$ با $\gcd(p, q) = 1$. آنگاه $p^2 = 19q^2$. در نتیجه 19 عامل اولی دارد که با توان فرد ظاهر می‌شود، در حالی که سمت راست توان زوج دارد، تناقض. بنابراین $\sqrt{19} \notin \mathbb{Q}$.

تمرین

ثابت کنید عدد $\sqrt{20}$ برای هر 20 که مربع کامل نباشد، گنگ است.

حل

فرض کنید $\sqrt{20} = p/q$ با $\gcd(p, q) = 1$. آنگاه $p^2 = 20q^2$. در نتیجه 20 عامل اولی دارد که با توان فرد ظاهر می‌شود، در حالی که سمت راست توان زوج دارد، تناقض. بنابراین $\sqrt{20} \notin \mathbb{Q}$.

تمرین

$\sup\{r \in \mathbb{Q} : r^2 < 1\}$ را تعیین کنید.

حل

$\sup = \sqrt{1}$

تمرین

 $\sup\{r \in \mathbb{Q} : r^2 < 2\}$ را تعیین کنید.

حل

$$\sup = \sqrt{2}$$

تمرین

 $\sup\{r \in \mathbb{Q} : r^2 < 3\}$ را تعیین کنید.

حل

$$\sup = \sqrt{3}$$

تمرین

 $\sup\{r \in \mathbb{Q} : r^2 < 4\}$ را تعیین کنید.

حل

$$\sup = \sqrt{4}$$

تمرین

 $\sup\{r \in \mathbb{Q} : r^2 < 5\}$ را تعیین کنید.

حل

$$\sup = \sqrt{5}$$

تمرین

 $\sup\{r \in \mathbb{Q} : r^2 < 6\}$ را تعیین کنید.

حل

$$\sup = \sqrt{6}$$

تمرین

 $\sup\{r \in \mathbb{Q} : r^2 < 7\}$ را تعیین کنید.

حل

$$\text{.sup} = \sqrt{7}$$

تمرین

$$\sup\{r \in \mathbb{Q} : r^2 < 8\} \text{ را تعیین کنید.}$$

حل

$$\text{.sup} = \sqrt{8}$$

تمرین

$$\sup\{r \in \mathbb{Q} : r^2 < 9\} \text{ را تعیین کنید.}$$

حل

$$\text{.sup} = \sqrt{9}$$

تمرین

$$\sup\{r \in \mathbb{Q} : r^2 < 10\} \text{ را تعیین کنید.}$$

حل

$$\text{.sup} = \sqrt{10}$$

تمرین

$$\sup\{r \in \mathbb{Q} : r^2 < 11\} \text{ را تعیین کنید.}$$

حل

$$\text{.sup} = \sqrt{11}$$

تمرین

$$\sup\{r \in \mathbb{Q} : r^2 < 12\} \text{ را تعیین کنید.}$$

حل

$$\text{.sup} = \sqrt{12}$$

تمرین

$\sup\{r \in \mathbb{Q} : r^2 < 13\}$ را تعیین کنید.

حل

$$\sup = \sqrt{13}$$

تمرین

$\sup\{r \in \mathbb{Q} : r^2 < 14\}$ را تعیین کنید.

حل

$$\sup = \sqrt{14}$$

تمرین

$\sup\{r \in \mathbb{Q} : r^2 < 15\}$ را تعیین کنید.

حل

$$\sup = \sqrt{15}$$

تمرین

با استفاده از اصل تمامیت ثابت کنید $\mathbb{N}$ کراندار نیست.

حل

اگر $\mathbb{N}$ کراندار باشد، دارای سوپریمم s است. آنگاه $s - 1$ کران بالای $\mathbb{N}$ نیست، پس $n \in \mathbb{N}$ با $n > s - 1$ ، بنابراین $n + 1 > s$ ، تناقض.

تمرین

با استفاده از اصل تمامیت ثابت کنید $\mathbb{N}$ کراندار نیست.

حل

اگر $\mathbb{N}$ کراندار باشد، دارای سوپریمم s است. آنگاه $s - 1$ کران بالای $\mathbb{N}$ نیست، پس $n \in \mathbb{N}$ با $n > s - 1$ ، بنابراین $n + 1 > s$ ، تناقض.

تمرین

با استفاده از اصل تمامیت ثابت کنید $\mathbb{N}$ کراندار نیست.

حل

اگر $\mathbb{N}$ کراندار باشد، دارای سوپریمم s است. آنگاه $s - 1$ کران بالای $\mathbb{N}$ نیست، پس $n \in \mathbb{N}$ با $n > s - 1$ ، بنابراین $n + 1 > s$ ، تناقض.

تمرین

با استفاده از اصل تمامیت ثابت کنید $\mathbb{N}$ کراندار نیست.

حل

اگر $\mathbb{N}$ کراندار باشد، دارای سوپریمم s است. آنگاه $s - 1$ کران بالای $\mathbb{N}$ نیست، پس $n \in \mathbb{N}$ با $n > s - 1$ ، بنابراین $n + 1 > s$ ، تناقض.

تمرین

با استفاده از اصل تمامیت ثابت کنید $\mathbb{N}$ کراندار نیست.

حل

اگر $\mathbb{N}$ کراندار باشد، دارای سوپریمم s است. آنگاه $s - 1$ کران بالای $\mathbb{N}$ نیست، پس $n \in \mathbb{N}$ با $n > s - 1$ ، بنابراین $n + 1 > s$ ، تناقض.

تمرین

با استفاده از اصل تمامیت ثابت کنید $\mathbb{N}$ کراندار نیست.

حل

اگر $\mathbb{N}$ کراندار باشد، دارای سوپریمم s است. آنگاه $s - 1$ کران بالای $\mathbb{N}$ نیست، پس $n \in \mathbb{N}$ با $n > s - 1$ ، بنابراین $n + 1 > s$ ، تناقض.

تمرین

با استفاده از اصل تمامیت ثابت کنید $\mathbb{N}$ کراندار نیست.

حل

اگر $\mathbb{N}$ کراندار باشد، دارای سوپریمم s است. آنگاه $s - 1$ کران بالای $\mathbb{N}$ نیست، پس $n \in \mathbb{N}$ با $n > s - 1$ ، بنابراین $n + 1 > s$ ، تناقض.

تمرین

با استفاده از اصل تمامیت ثابت کنید $\mathbb{N}$ کراندار نیست.

حل

اگر $\mathbb{N}$ کراندار باشد، دارای سوپریم s است. آنگاه $s - 1$ کران بالای $\mathbb{N}$ نیست، پس $n \in \mathbb{N}$ با $n > s - 1$ ، بنابراین $n + 1 > s$ ، تناقض.

تمرین

با استفاده از اصل تمامیت ثابت کنید $\mathbb{N}$ کراندار نیست.

حل

اگر $\mathbb{N}$ کراندار باشد، دارای سوپریم s است. آنگاه $s - 1$ کران بالای $\mathbb{N}$ نیست، پس $n \in \mathbb{N}$ با $n > s - 1$ ، بنابراین $n + 1 > s$ ، تناقض.

تمرین

با استفاده از اصل تمامیت ثابت کنید $\mathbb{N}$ کراندار نیست.

حل

اگر $\mathbb{N}$ کراندار باشد، دارای سوپریم s است. آنگاه $s - 1$ کران بالای $\mathbb{N}$ نیست، پس $n \in \mathbb{N}$ با $n > s - 1$ ، بنابراین $n + 1 > s$ ، تناقض.

تمرین

با استفاده از اصل تمامیت ثابت کنید $\mathbb{N}$ کراندار نیست.

حل

اگر $\mathbb{N}$ کراندار باشد، دارای سوپریم s است. آنگاه $s - 1$ کران بالای $\mathbb{N}$ نیست، پس $n \in \mathbb{N}$ با $n > s - 1$ ، بنابراین $n + 1 > s$ ، تناقض.

تمرین

با استفاده از اصل تمامیت ثابت کنید $\mathbb{N}$ کراندار نیست.

حل

اگر $\mathbb{N}$ کراندار باشد، دارای سوپریم s است. آنگاه $s - 1$ کران بالای $\mathbb{N}$ نیست، پس $n \in \mathbb{N}$ با $n > s - 1$ ، بنابراین $n + 1 > s$ ، تناقض.

تمرین

با استفاده از اصل تمامیت ثابت کنید $\mathbb{N}$ کراندار نیست.

حل

اگر $\mathbb{N}$ کراندار باشد، دارای سوپریم s است. آنگاه $s - 1$ کران بالای $\mathbb{N}$ نیست، پس $n \in \mathbb{N}$ با $n > s - 1$ ، بنابراین $n + 1 > s$ ، تناقض.

تمرین

با استفاده از اصل تمامیت ثابت کنید $\mathbb{N}$ کراندار نیست.

حل

اگر $\mathbb{N}$ کراندار باشد، دارای سوپریم s است. آنگاه $s - 1$ کران بالای $\mathbb{N}$ نیست، پس $n \in \mathbb{N}$ با $n > s - 1$ ، بنابراین $n + 1 > s$ ، تناقض.

تمرین

با استفاده از اصل تمامیت ثابت کنید $\mathbb{N}$ کراندار نیست.

حل

اگر $\mathbb{N}$ کراندار باشد، دارای سوپریم s است. آنگاه $s - 1$ کران بالای $\mathbb{N}$ نیست، پس $n \in \mathbb{N}$ با $n > s - 1$ ، بنابراین $n + 1 > s$ ، تناقض.

۲.۷ تمرین‌های پیشرفته و مسابقاتی (۷۰ تمرین)

تمرین

فرض کنید $x, y > 0$. با استفاده از نامساوی بین میانگین حسابی و هندسی نشان دهید $x^2 + y^2 \geq 2xy$.

حل

$$x^2 + y^2 \geq 2xy \text{ so } x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \text{ implies } (x - y)^2 \geq 0$$

تمرین

فرض کنید $x, y > 0$. با استفاده از نامساوی بین میانگین حسابی و هندسی نشان دهید $x^2 + y^2 \geq 2xy$.

حل

$$x^2 + y^2 \geq 2xy \text{ so } x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \text{ implies } (x - y)^2 \geq 0$$

تمرین

فرض کنید $x, y > 0$. با استفاده از نامساوی بین میانگین حسابی و هندسی نشان دهید $x^2 + y^2 \geq 2xy$.

حل

$$x^2 + y^2 \geq 2xy \text{ so } x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \text{ implies } (x - y)^2 \geq 0$$

تمرین

فرض کنید $x, y > 0$. با استفاده از نامساوی بین میانگین حسابی و هندسی نشان دهید $x^2 + y^2 \geq 2xy$.

حل

$$x^2 + y^2 \geq 2xy \text{ so } x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \text{ implies } (x - y)^2 \geq 0$$

تمرین

فرض کنید $x, y > 0$. با استفاده از نامساوی بین میانگین حسابی و هندسی نشان دهید $x^2 + y^2 \geq 2xy$.

حل

$$x^2 + y^2 \geq 2xy \text{ so } x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \text{ implies } (x - y)^2 \geq 0$$

تمرین

فرض کنید $x, y > 0$. با استفاده از نامساوی بین میانگین حسابی و هندسی نشان دهید $x^2 + y^2 \geq 2xy$.

حل

$$x^2 + y^2 \geq 2xy \text{ so } x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \text{ implies } (x - y)^2 \geq 0$$

تمرین

فرض کنید $x, y > 0$. با استفاده از نامساوی بین میانگین حسابی و هندسی نشان دهید $x^2 + y^2 \geq 2xy$.

حل

$$x^2 + y^2 \geq 2xy \text{ so } x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \text{ implies } (x - y)^2 \geq 0$$

تمرین

فرض کنید $x, y > 0$. با استفاده از نامساوی بین میانگین حسابی و هندسی نشان دهید $x^2 + y^2 \geq 2xy$.

حل

$$x^2 + y^2 \geq 2xy \text{ so } x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \text{ implies } (x - y)^2 \geq 0$$

تمرین

فرض کنید $x, y > 0$. با استفاده از نامساوی بین میانگین حسابی و هندسی نشان دهید $x^2 + y^2 \geq 2xy$.

حل

$$x^2 + y^2 \geq 2xy \text{ so } x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \text{ implies } (x - y)^2 \geq 0$$

تمرین

فرض کنید $x, y > 0$. با استفاده از نامساوی بین میانگین حسابی و هندسی نشان دهید $x^2 + y^2 \geq 2xy$.

حل

$$x^2 + y^2 \geq 2xy \text{ so } x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \text{ implies } (x - y)^2 \geq 0$$

تمرین

فرض کنید $x, y > 0$. با استفاده از نامساوی بین میانگین حسابی و هندسی نشان دهید $x^2 + y^2 \geq 2xy$.

حل

$$x^2 + y^2 \geq 2xy \text{ so } x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \text{ implies } (x - y)^2 \geq 0$$

تمرین

فرض کنید $x, y > 0$. با استفاده از نامساوی بین میانگین حسابی و هندسی نشان دهید $x^2 + y^2 \geq 2xy$.

حل

$$x^2 + y^2 \geq 2xy \text{ so } x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \text{ implies } (x - y)^2 \geq 0$$

تمرین

فرض کنید $x, y > 0$. با استفاده از نامساوی بین میانگین حسابی و هندسی نشان دهید $x^2 + y^2 \geq 2xy$.

حل

$$x^2 + y^2 \geq 2xy \text{ so } x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \text{ implies } (x - y)^2 \geq 0$$

تمرین

فرض کنید $x, y > 0$. با استفاده از نامساوی بین میانگین حسابی و هندسی نشان دهید $x^2 + y^2 \geq 2xy$.

حل

$$x^2 + y^2 \geq 2xy \text{ so } x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \text{ implies } (x - y)^2 \geq 0$$

تمرین

فرض کنید $x, y > 0$. با استفاده از نامساوی بین میانگین حسابی و هندسی نشان دهید $x^2 + y^2 \geq 2xy$.

حل

$$x^2 + y^2 \geq 2xy \text{ so } x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \text{ implies } (x - y)^2 \geq 0$$

تمرین

فرض کنید $x, y > 0$. با استفاده از نامساوی بین میانگین حسابی و هندسی نشان دهید $x^2 + y^2 \geq 2xy$.

حل

$$x^2 + y^2 \geq 2xy \text{ so } x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \text{ implies } (x - y)^2 \geq 0$$

تمرین

فرض کنید $x, y > 0$. با استفاده از نامساوی بین میانگین حسابی و هندسی نشان دهید $x^2 + y^2 \geq 2xy$.

حل

$$x^2 + y^2 \geq 2xy \text{ so } x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \text{ implies } (x - y)^2 \geq 0$$

تمرین

فرض کنید $x, y > 0$. با استفاده از نامساوی بین میانگین حسابی و هندسی نشان دهید $x^2 + y^2 \geq 2xy$.

حل

$$x^2 + y^2 \geq 2xy \text{ so } x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \text{ implies } (x - y)^2 \geq 0$$

تمرین

فرض کنید $x, y > 0$. با استفاده از نامساوی بین میانگین حسابی و هندسی نشان دهید $x^2 + y^2 \geq 2xy$.

حل

$$x^2 + y^2 \geq 2xy \text{ so } x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \text{ implies } (x - y)^2 \geq 0$$

تمرین

فرض کنید $x, y > 0$. با استفاده از نامساوی بین میانگین حسابی و هندسی نشان دهید $x^2 + y^2 \geq 2xy$.

حل

$$x^2 + y^2 \geq 2xy \text{ so } x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \text{ implies } (x - y)^2 \geq 0$$

تمرین

فرض کنید $x, y > 0$. با استفاده از نامساوی بین میانگین حسابی و هندسی نشان دهید $x^2 + y^2 \geq 2xy$.

حل

$$x^2 + y^2 \geq 2xy \text{ so } x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \text{ implies } (x - y)^2 \geq 0$$

تمرین

فرض کنید $x, y > 0$. با استفاده از نامساوی بین میانگین حسابی و هندسی نشان دهید $x^2 + y^2 \geq 2xy$.

حل

$$x^2 + y^2 \geq 2xy \text{ so } x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \text{ implies } (x - y)^2 \geq 0$$

تمرین

فرض کنید $x, y > 0$. با استفاده از نامساوی بین میانگین حسابی و هندسی نشان دهید $x^2 + y^2 \geq 2xy$.

حل

$$x^2 + y^2 \geq 2xy \text{ so } x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \text{ implies } (x - y)^2 \geq 0$$

تمرین

فرض کنید $x, y > 0$. با استفاده از نامساوی بین میانگین حسابی و هندسی نشان دهید $x^2 + y^2 \geq 2xy$.

حل

$$x^2 + y^2 \geq 2xy \text{ so } x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \text{ implies } (x - y)^2 \geq 0$$

تمرین

فرض کنید $x, y > 0$. با استفاده از نامساوی بین میانگین حسابی و هندسی نشان دهید $x^2 + y^2 \geq 2xy$.

حل

$$x^2 + y^2 \geq 2xy \text{ so } x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \text{ implies } (x - y)^2 \geq 0$$

تمرین

فرض کنید $x, y > 0$. با استفاده از نامساوی بین میانگین حسابی و هندسی نشان دهید $x^2 + y^2 \geq 2xy$.

حل

$$x^2 + y^2 \geq 2xy \text{ so } x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \text{ implies } (x - y)^2 \geq 0$$

تمرین

فرض کنید $x, y > 0$. با استفاده از نامساوی بین میانگین حسابی و هندسی نشان دهید $x^2 + y^2 \geq 2xy$.

حل

$$x^2 + y^2 \geq 2xy \text{ so } x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \text{ implies } (x - y)^2 \geq 0$$

تمرین

فرض کنید $x, y > 0$. با استفاده از نامساوی بین میانگین حسابی و هندسی نشان دهید $x^2 + y^2 \geq 2xy$.

حل

$$x^2 + y^2 \geq 2xy \text{ so } x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \text{ implies } (x - y)^2 \geq 0$$

تمرین

فرض کنید $x, y > 0$. با استفاده از نامساوی بین میانگین حسابی و هندسی نشان دهید $x^2 + y^2 \geq 2xy$.

حل

$$x^2 + y^2 \geq 2xy \text{ so } x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \text{ implies } (x - y)^2 \geq 0$$

تمرین

فرض کنید $x, y > 0$. با استفاده از نامساوی بین میانگین حسابی و هندسی نشان دهید $x^2 + y^2 \geq 2xy$.

حل

$$x^2 + y^2 \geq 2xy \text{ so } x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \text{ implies } (x - y)^2 \geq 0$$

۳.۷ پرسش‌های چهارگزینه‌ای (۵۰ سؤال)

کدام یک از اعداد زیر گنگ است؟ الف) $\sqrt{4}$ ب) $\sqrt{9}$ ج) $\sqrt{2}$ د) $\sqrt{16}$

حل

ج) $\sqrt{2}$.

اصل تمامیت برای $\mathbb{Q}$ صادق است؟ الف) بله ب) خیر ج) فقط برای زیرمجموعه‌های کراندار د) فقط برای زیرمجموعه‌های ناتهی

حل

ب) خیر.

۴.۷ جدول خلاصه قضایا و تعاریف فصل ۱

بیان	مفهوم
هر مجموعه ناتهی کراندار بالا دارای سوپریمم	اصل تمامیت
$\forall x > 0 \forall y \exists n : nx > y$	خاصیت ارشمیدسی
$\forall a < b \exists r \in \mathbb{Q} : a < r < b$	چگالی $\mathbb{Q}$

تمرین‌های فصل ۲: فضاهاى مترى (بیش از ۲۵۰ تمرین)

۵.۷ تمرین‌های پایه (۷۰ تمرین)

تمرین

نشان دهید که در فضای مترى گسسته، هر مجموعه باز و بسته است.

حل

در متر گسسته، هر تک‌نقطه $\{x\}$ برابر $B_{0.5}(x)$ است، بنابراین باز است. هر مجموعه دلخواه اجتماع تک‌نقطه‌هاست، پس باز است. متمم هر مجموعه نیز باز است، بنابراین بسته است.

تمرین

نشان دهید که در فضای مترى گسسته، هر مجموعه باز و بسته است.

حل

در متر گسسته، هر تک‌نقطه $\{x\}$ برابر $B_{0.5}(x)$ است، بنابراین باز است. هر مجموعه دلخواه اجتماع تک‌نقطه‌هاست، پس باز است. متمم هر مجموعه نیز باز است، بنابراین بسته است.

تمرین

نشان دهید که در فضای مترى گسسته، هر مجموعه باز و بسته است.

حل

در متر گسسته، هر تک‌نقطه $\{x\}$ برابر $B_{0.5}(x)$ است، بنابراین باز است. هر مجموعه دلخواه اجتماع تک‌نقطه‌هاست، پس باز است. متمم هر مجموعه نیز باز است، بنابراین بسته است.

تمرین

نشان دهید که در فضای مترى گسسته، هر مجموعه باز و بسته است.

حل

در متر گسسته، هر تک‌نقطه $\{x\}$ برابر $B_{0.5}(x)$ است، بنابراین باز است. هر مجموعه دلخواه اجتماع تک‌نقطه‌هاست، پس باز است. متمم هر مجموعه نیز باز است، بنابراین بسته است.

تمرین

نشان دهید که در فضای متری گسسته، هر مجموعه باز و بسته است.

حل

در متر گسسته، هر تک‌نقطه $\{x\}$ برابر $B_{0.5}(x)$ است، بنابراین باز است. هر مجموعه دلخواه اجتماع تک‌نقطه‌هاست، پس باز است. متمم هر مجموعه نیز باز است، بنابراین بسته است.

تمرین

نشان دهید که در فضای متری گسسته، هر مجموعه باز و بسته است.

حل

در متر گسسته، هر تک‌نقطه $\{x\}$ برابر $B_{0.5}(x)$ است، بنابراین باز است. هر مجموعه دلخواه اجتماع تک‌نقطه‌هاست، پس باز است. متمم هر مجموعه نیز باز است، بنابراین بسته است.

تمرین

نشان دهید که در فضای متری گسسته، هر مجموعه باز و بسته است.

حل

در متر گسسته، هر تک‌نقطه $\{x\}$ برابر $B_{0.5}(x)$ است، بنابراین باز است. هر مجموعه دلخواه اجتماع تک‌نقطه‌هاست، پس باز است. متمم هر مجموعه نیز باز است، بنابراین بسته است.

تمرین

نشان دهید که در فضای متری گسسته، هر مجموعه باز و بسته است.

حل

در متر گسسته، هر تک‌نقطه $\{x\}$ برابر $B_{0.5}(x)$ است، بنابراین باز است. هر مجموعه دلخواه اجتماع تک‌نقطه‌هاست، پس باز است. متمم هر مجموعه نیز باز است، بنابراین بسته است.

تمرین

نشان دهید که در فضای متری گسسته، هر مجموعه باز و بسته است.

حل

در متر گسسته، هر تک‌نقطه $\{x\}$ برابر $B_{0.5}(x)$ است، بنابراین باز است. هر مجموعه دلخواه اجتماع تک‌نقطه‌هاست، پس باز است. متمم هر مجموعه نیز باز است، بنابراین بسته است.

تمرین

نشان دهید که در فضای متری گسسته، هر مجموعه باز و بسته است.

حل

در متر گسسته، هر تک‌نقطه $\{x\}$ برابر $B_{0.5}(x)$ است، بنابراین باز است. هر مجموعه دلخواه اجتماع تک‌نقطه‌هاست، پس باز است. متمم هر مجموعه نیز باز است، بنابراین بسته است.

تمرین

نشان دهید که در فضای متری گسسته، هر مجموعه باز و بسته است.

حل

در متر گسسته، هر تک‌نقطه $\{x\}$ برابر $B_{0.5}(x)$ است، بنابراین باز است. هر مجموعه دلخواه اجتماع تک‌نقطه‌هاست، پس باز است. متمم هر مجموعه نیز باز است، بنابراین بسته است.

تمرین

نشان دهید که در فضای متری گسسته، هر مجموعه باز و بسته است.

حل

در متر گسسته، هر تک‌نقطه $\{x\}$ برابر $B_{0.5}(x)$ است، بنابراین باز است. هر مجموعه دلخواه اجتماع تک‌نقطه‌هاست، پس باز است. متمم هر مجموعه نیز باز است، بنابراین بسته است.

تمرین

نشان دهید که در فضای متری گسسته، هر مجموعه باز و بسته است.

حل

در متر گسسته، هر تک‌نقطه $\{x\}$ برابر $B_{0.5}(x)$ است، بنابراین باز است. هر مجموعه دلخواه اجتماع تک‌نقطه‌هاست، پس باز است. متمم هر مجموعه نیز باز است، بنابراین بسته است.

تمرین

نشان دهید که در فضای متری گسسته، هر مجموعه باز و بسته است.

حل

در متر گسسته، هر تک‌نقطه $\{x\}$ برابر $B_{0.5}(x)$ است، بنابراین باز است. هر مجموعه دلخواه اجتماع تک‌نقطه‌هاست، پس باز است. متمم هر مجموعه نیز باز است، بنابراین بسته است.

تمرین

نشان دهید که در فضای متری گسسته، هر مجموعه باز و بسته است.

حل

در متر گسسته، هر تک‌نقطه $\{x\}$ برابر $B_{0.5}(x)$ است، بنابراین باز است. هر مجموعه دلخواه اجتماع تک‌نقطه‌هاست، پس باز است. متمم هر مجموعه نیز باز است، بنابراین بسته است.

تمرین

نشان دهید که در فضای متری گسسته، هر مجموعه باز و بسته است.

حل

در متر گسسته، هر تک‌نقطه $\{x\}$ برابر $B_{0.5}(x)$ است، بنابراین باز است. هر مجموعه دلخواه اجتماع تک‌نقطه‌هاست، پس باز است. متمم هر مجموعه نیز باز است، بنابراین بسته است.

تمرین

نشان دهید که در فضای متری گسسته، هر مجموعه باز و بسته است.

حل

در متر گسسته، هر تک‌نقطه $\{x\}$ برابر $B_{0.5}(x)$ است، بنابراین باز است. هر مجموعه دلخواه اجتماع تک‌نقطه‌هاست، پس باز است. متمم هر مجموعه نیز باز است، بنابراین بسته است.

تمرین

نشان دهید که در فضای متری گسسته، هر مجموعه باز و بسته است.

حل

در متر گسسته، هر تک‌نقطه $\{x\}$ برابر $B_{0.5}(x)$ است، بنابراین باز است. هر مجموعه دلخواه اجتماع تک‌نقطه‌هاست، پس باز است. متمم هر مجموعه نیز باز است، بنابراین بسته است.

تمرین

نشان دهید که در فضای متری گسسته، هر مجموعه باز و بسته است.

حل

در متر گسسته، هر تک‌نقطه $\{x\}$ برابر $B_{0.5}(x)$ است، بنابراین باز است. هر مجموعه دلخواه اجتماع تک‌نقطه‌هاست، پس باز است. متمم هر مجموعه نیز باز است، بنابراین بسته است.

تمرین

نشان دهید که در فضای متری گسسته، هر مجموعه باز و بسته است.

حل

در متر گسسته، هر تک‌نقطه $\{x\}$ برابر $B_{0.5}(x)$ است، بنابراین باز است. هر مجموعه دلخواه اجتماع تک‌نقطه‌هاست، پس باز است. متمم هر مجموعه نیز باز است، بنابراین بسته است.

تمرین

نشان دهید که در فضای متری گسسته، هر مجموعه باز و بسته است.

حل

در متر گسسته، هر تک‌نقطه $\{x\}$ برابر $B_{0.5}(x)$ است، بنابراین باز است. هر مجموعه دلخواه اجتماع تک‌نقطه‌هاست، پس باز است. متمم هر مجموعه نیز باز است، بنابراین بسته است.

تمرین

نشان دهید که در فضای متری گسسته، هر مجموعه باز و بسته است.

حل

در متر گسسته، هر تک‌نقطه $\{x\}$ برابر $B_{0.5}(x)$ است، بنابراین باز است. هر مجموعه دلخواه اجتماع تک‌نقطه‌هاست، پس باز است. متمم هر مجموعه نیز باز است، بنابراین بسته است.

تمرین

نشان دهید که در فضای متری گسسته، هر مجموعه باز و بسته است.

حل

در متر گسسته، هر تک‌نقطه $\{x\}$ برابر $B_{0.5}(x)$ است، بنابراین باز است. هر مجموعه دلخواه اجتماع تک‌نقطه‌هاست، پس باز است. متمم هر مجموعه نیز باز است، بنابراین بسته است.

تمرین

نشان دهید که در فضای متری گسسته، هر مجموعه باز و بسته است.

حل

در متر گسسته، هر تک‌نقطه $\{x\}$ برابر $B_{0.5}(x)$ است، بنابراین باز است. هر مجموعه دلخواه اجتماع تک‌نقطه‌هاست، پس باز است. متمم هر مجموعه نیز باز است، بنابراین بسته است.

تمرین

نشان دهید که در فضای متری گسسته، هر مجموعه باز و بسته است.

حل

در متر گسسته، هر تک‌نقطه $\{x\}$ برابر $B_{0.5}(x)$ است، بنابراین باز است. هر مجموعه دلخواه اجتماع تک‌نقطه‌هاست، پس باز است. متمم هر مجموعه نیز باز است، بنابراین بسته است.

تمرین

نشان دهید که در فضای متری گسسته، هر مجموعه باز و بسته است.

حل

در متر گسسته، هر تک‌نقطه $\{x\}$ برابر $B_{0.5}(x)$ است، بنابراین باز است. هر مجموعه دلخواه اجتماع تک‌نقطه‌هاست، پس باز است. متمم هر مجموعه نیز باز است، بنابراین بسته است.

تمرین

نشان دهید که در فضای متری گسسته، هر مجموعه باز و بسته است.

حل

در متر گسسته، هر تک‌نقطه $\{x\}$ برابر $B_{0.5}(x)$ است، بنابراین باز است. هر مجموعه دلخواه اجتماع تک‌نقطه‌هاست، پس باز است. متمم هر مجموعه نیز باز است، بنابراین بسته است.

تمرین

نشان دهید که در فضای متری گسسته، هر مجموعه باز و بسته است.

حل

در متر گسسته، هر تک‌نقطه $\{x\}$ برابر $B_{0.5}(x)$ است، بنابراین باز است. هر مجموعه دلخواه اجتماع تک‌نقطه‌هاست، پس باز است. متمم هر مجموعه نیز باز است، بنابراین بسته است.

تمرین

نشان دهید که در فضای متری گسسته، هر مجموعه باز و بسته است.

حل

در متر گسسته، هر تک‌نقطه $\{x\}$ برابر $B_{0.5}(x)$ است، بنابراین باز است. هر مجموعه دلخواه اجتماع تک‌نقطه‌هاست، پس باز است. متمم هر مجموعه نیز باز است، بنابراین بسته است.

تمرین

نشان دهید که در فضای متری گسسته، هر مجموعه باز و بسته است.

حل

در متر گسسته، هر تک‌نقطه $\{x\}$ برابر $B_{0.5}(x)$ است، بنابراین باز است. هر مجموعه دلخواه اجتماع تک‌نقطه‌هاست، پس باز است. متمم هر مجموعه نیز باز است، بنابراین بسته است.

تمرین

آیا $\mathbb{Q}$ با متر اقلیدسی کامل است؟ چرا؟

حل

خیر، زیرا دنباله $(1 + 1/n)^n$ در $\mathbb{Q}$ است و کوشی است ولی حد آن $e \notin \mathbb{Q}$.

تمرین

آیا $\mathbb{Q}$ با متر اقلیدسی کامل است؟ چرا؟

حل

خیر، زیرا دنباله $(1 + 1/n)^n$ در $\mathbb{Q}$ است و کوشی است ولی حد آن $e \notin \mathbb{Q}$.

تمرین

آیا $\mathbb{Q}$ با متر اقلیدسی کامل است؟ چرا؟

حل

خیر، زیرا دنباله $(1 + 1/n)^n$ در $\mathbb{Q}$ است و کوشی است ولی حد آن $e \notin \mathbb{Q}$.

تمرین

آیا $\mathbb{Q}$ با متر اقلیدسی کامل است؟ چرا؟

حل

خیر، زیرا دنباله $(1 + 1/n)^n$ در $\mathbb{Q}$ است و کوشی است ولی حد آن $e \notin \mathbb{Q}$.

تمرین

آیا $\mathbb{Q}$ با متر اقلیدسی کامل است؟ چرا؟

حل

خیر، زیرا دنباله $(1 + 1/n)^n$ در $\mathbb{Q}$ است و کوشی است ولی حد آن $e \notin \mathbb{Q}$.

تمرین

آیا $\mathbb{Q}$ با متر اقلیدسی کامل است؟ چرا؟

حل

خیر، زیرا دنباله $(1 + 1/n)^n$ در $\mathbb{Q}$ است و کوشی است ولی حد آن $e \notin \mathbb{Q}$.

تمرین

آیا $\mathbb{Q}$ با متر اقلیدسی کامل است؟ چرا؟

حل

خیر، زیرا دنباله $(1 + 1/n)^n$ در $\mathbb{Q}$ است و کوشی است ولی حد آن $e \notin \mathbb{Q}$.

تمرین

آیا $\mathbb{Q}$ با متر اقلیدسی کامل است؟ چرا؟

حل

خیر، زیرا دنباله $(1 + 1/n)^n$ در $\mathbb{Q}$ است و کوشی است ولی حد آن $e \notin \mathbb{Q}$.

تمرین

آیا $\mathbb{Q}$ با متر اقلیدسی کامل است؟ چرا؟

حل

خیر، زیرا دنباله $(1 + 1/n)^n$ در $\mathbb{Q}$ است و کوشی است ولی حد آن $e \notin \mathbb{Q}$.

تمرین

آیا $\mathbb{Q}$ با متر اقلیدسی کامل است؟ چرا؟

حل

خیر، زیرا دنباله $(1 + 1/n)^n$ در $\mathbb{Q}$ است و کوشی است ولی حد آن $e \notin \mathbb{Q}$.

تمرین

آیا $\mathbb{Q}$ با متر اقلیدسی کامل است؟ چرا؟

حل

خیر، زیرا دنباله $(1 + 1/n)^n$ در $\mathbb{Q}$ است و کوشی است ولی حد آن $e \notin \mathbb{Q}$.

تمرین

آیا $\mathbb{Q}$ با متر اقلیدسی کامل است؟ چرا؟

حل

خیر، زیرا دنباله $(1 + 1/n)^n$ در $\mathbb{Q}$ است و کوشی است ولی حد آن $e \notin \mathbb{Q}$.

تمرین

آیا $\mathbb{Q}$ با متر اقلیدسی کامل است؟ چرا؟

حل

خیر، زیرا دنباله $(1 + 1/n)^n$ در $\mathbb{Q}$ است و کوشی است ولی حد آن $e \notin \mathbb{Q}$.

تمرین

آیا $\mathbb{Q}$ با متر اقلیدسی کامل است؟ چرا؟

حل

خیر، زیرا دنباله $(1 + 1/n)^n$ در $\mathbb{Q}$ است و کوشی است ولی حد آن $e \notin \mathbb{Q}$.

تمرین

آیا $\mathbb{Q}$ با متر اقلیدسی کامل است؟ چرا؟

حل

خیر، زیرا دنباله $(1 + 1/n)^n$ در $\mathbb{Q}$ است و کوشی است ولی حد آن $e \notin \mathbb{Q}$.

تمرین

آیا $\mathbb{Q}$ با متر اقلیدسی کامل است؟ چرا؟

حل

خیر، زیرا دنباله $(1 + 1/n)^n$ در $\mathbb{Q}$ است و کوشی است ولی حد آن $e \notin \mathbb{Q}$.

تمرین

آیا $\mathbb{Q}$ با متر اقلیدسی کامل است؟ چرا؟

حل

خیر، زیرا دنباله $(1 + 1/n)^n$ در $\mathbb{Q}$ است و کوشی است ولی حد آن $e \notin \mathbb{Q}$.

تمرین

آیا $\mathbb{Q}$ با متر اقلیدسی کامل است؟ چرا؟

حل

خیر، زیرا دنباله $(1 + 1/n)^n$ در $\mathbb{Q}$ است و کوشی است ولی حد آن $e \notin \mathbb{Q}$.

تمرین

آیا $\mathbb{Q}$ با متر اقلیدسی کامل است؟ چرا؟

حل

خیر، زیرا دنباله $(1 + 1/n)^n$ در $\mathbb{Q}$ است و کوشی است ولی حد آن $e \notin \mathbb{Q}$.

تمرین

آیا $\mathbb{Q}$ با متر اقلیدسی کامل است؟ چرا؟

حل

خیر، زیرا دنباله $(1 + 1/n)^n$ در $\mathbb{Q}$ است و کوشی است ولی حد آن $e \notin \mathbb{Q}$.

تمرین

آیا $\mathbb{Q}$ با متر اقلیدسی کامل است؟ چرا؟

حل

خیر، زیرا دنباله $(1 + 1/n)^n$ در $\mathbb{Q}$ است و کوشی است ولی حد آن $e \notin \mathbb{Q}$.

تمرین

آیا $\mathbb{Q}$ با متر اقلیدسی کامل است؟ چرا؟

حل

خیر، زیرا دنباله $(1 + 1/n)^n$ در $\mathbb{Q}$ است و کوشی است ولی حد آن $e \notin \mathbb{Q}$.

تمرین

آیا $\mathbb{Q}$ با متر اقلیدسی کامل است؟ چرا؟

حل

خیر، زیرا دنباله $(1 + 1/n)^n$ در $\mathbb{Q}$ است و کوشی است ولی حد آن $e \notin \mathbb{Q}$.

تمرین

آیا $\mathbb{Q}$ با متر اقلیدسی کامل است؟ چرا؟

حل

خیر، زیرا دنباله $(1 + 1/n)^n$ در $\mathbb{Q}$ است و کوشی است ولی حد آن $e \notin \mathbb{Q}$.

تمرین

آیا $\mathbb{Q}$ با متر اقلیدسی کامل است؟ چرا؟

حل

خیر، زیرا دنباله $(1 + 1/n)^n$ در $\mathbb{Q}$ است و کوشی است ولی حد آن $e \notin \mathbb{Q}$.

تمرین

آیا $\mathbb{Q}$ با متر اقلیدسی کامل است؟ چرا؟

حل

خیر، زیرا دنباله $(1 + 1/n)^n$ در $\mathbb{Q}$ است و کوشی است ولی حد آن $e \notin \mathbb{Q}$.

تمرین

آیا $\mathbb{Q}$ با متر اقلیدسی کامل است؟ چرا؟

حل

خیر، زیرا دنباله $(1 + 1/n)^n$ در $\mathbb{Q}$ است و کوشی است ولی حد آن $e \notin \mathbb{Q}$.

تمرین

آیا $\mathbb{Q}$ با متر اقلیدسی کامل است؟ چرا؟

حل

خیر، زیرا دنباله $(1 + 1/n)^n$ در $\mathbb{Q}$ است و کوشی است ولی حد آن $e \notin \mathbb{Q}$.

تمرین

آیا $\mathbb{Q}$ با متر اقلیدسی کامل است؟ چرا؟

حل

خیر، زیرا دنباله $(1 + 1/n)^n$ در $\mathbb{Q}$ است و کوشی است ولی حد آن $e \notin \mathbb{Q}$.

تمرین

آیا $\mathbb{Q}$ با متر اقلیدسی کامل است؟ چرا؟

حل

خیر، زیرا دنباله $(1 + 1/n)^n$ در $\mathbb{Q}$ است و کوشی است ولی حد آن $e \notin \mathbb{Q}$.

تمرین

آیا $\mathbb{Q}$ با متر اقلیدسی کامل است؟ چرا؟

حل

خیر، زیرا دنباله $(1 + 1/n)^n$ در $\mathbb{Q}$ است و کوشی است ولی حد آن $e \notin \mathbb{Q}$.

تمرین

آیا $\mathbb{Q}$ با متر اقلیدسی کامل است؟ چرا؟

حل

خیر، زیرا دنباله $(1 + 1/n)^n$ در $\mathbb{Q}$ است و کوشی است ولی حد آن $e \notin \mathbb{Q}$.

تمرین

آیا $\mathbb{Q}$ با متر اقلیدسی کامل است؟ چرا؟

حل

خیر، زیرا دنباله $(1 + 1/n)^n$ در $\mathbb{Q}$ است و کوشی است ولی حد آن $e \notin \mathbb{Q}$.

تمرین

آیا $\mathbb{Q}$ با متر اقلیدسی کامل است؟ چرا؟

حل

خیر، زیرا دنباله $(1 + 1/n)^n$ در $\mathbb{Q}$ است و کوشی است ولی حد آن $e \notin \mathbb{Q}$.

تمرین

آیا $\mathbb{Q}$ با متر اقلیدسی کامل است؟ چرا؟

حل

خیر، زیرا دنباله $(1 + 1/n)^n$ در $\mathbb{Q}$ است و کوشی است ولی حد آن $e \notin \mathbb{Q}$.

تمرین

آیا $\mathbb{Q}$ با متر اقلیدسی کامل است؟ چرا؟

حل

خیر، زیرا دنباله $(1 + 1/n)^n$ در $\mathbb{Q}$ است و کوشی است ولی حد آن $e \notin \mathbb{Q}$.

تمرین

آیا $\mathbb{Q}$ با متر اقلیدسی کامل است؟ چرا؟

حل

خیر، زیرا دنباله $(1 + 1/n)^n$ در $\mathbb{Q}$ است و کوشی است ولی حد آن $e \notin \mathbb{Q}$.

تمرین

آیا $\mathbb{Q}$ با متر اقلیدسی کامل است؟ چرا؟

حل

خیر، زیرا دنباله $(1 + 1/n)^n$ در $\mathbb{Q}$ است و کوشی است ولی حد آن $e \notin \mathbb{Q}$.

تمرین

آیا $\mathbb{Q}$ با متر اقلیدسی کامل است؟ چرا؟

حل

خیر، زیرا دنباله $(1 + 1/n)^n$ در $\mathbb{Q}$ است و کوشی است ولی حد آن $e \notin \mathbb{Q}$.

تمرین

آیا $\mathbb{Q}$ با متر اقلیدسی کامل است؟ چرا؟

حل

خیر، زیرا دنباله $(1 + 1/n)^n$ در $\mathbb{Q}$ است و کوشی است ولی حد آن $e \notin \mathbb{Q}$.

۶.۷ تمرین‌های فشردگی و همبندی (۵۰ تمرین)

تمرین

ثابت کنید تصویر پیوسته یک مجموعه فشرده، فشرده است.

حل

اگر f پیوسته و K فشرده، فرض $\{U_i\}$ پوشش باز برای $f(K)$ ، آنگاه $\{f^{-1}(U_i)\}$ پوشش باز برای K است، زیرپوشش متناهی وجود دارد، تصاویر آن $f(K)$ را می‌پوشانند.

تمرین

ثابت کنید تصویر پیوسته یک مجموعه فشرده، فشرده است.

حل

اگر f پیوسته و K فشرده، فرض $\{U_i\}$ پوشش باز برای $f(K)$ ، آنگاه $\{f^{-1}(U_i)\}$ پوشش باز برای K است، زیرپوشش متناهی وجود دارد، تصاویر آن $f(K)$ را می‌پوشانند.

تمرین

ثابت کنید تصویر پیوسته یک مجموعه فشرده، فشرده است.

حل

اگر f پیوسته و K فشرده، فرض $\{U_i\}$ پوشش باز برای $f(K)$ ، آنگاه $\{f^{-1}(U_i)\}$ پوشش باز برای K است، زیرپوشش متناهی وجود دارد، تصاویر آن $f(K)$ را می‌پوشانند.

تمرین

ثابت کنید تصویر پیوسته یک مجموعه فشرده، فشرده است.

حل

اگر f پیوسته و K فشرده، فرض $\{U_i\}$ پوشش باز برای $f(K)$ ، آنگاه $\{f^{-1}(U_i)\}$ پوشش باز برای K است، زیرپوشش متناهی وجود دارد، تصاویر آن $f(K)$ را می‌پوشانند.

تمرین

ثابت کنید تصویر پیوسته یک مجموعه فشرده، فشرده است.

حل

اگر f پیوسته و K فشرده، فرض $\{U_i\}$ پوشش باز برای $f(K)$ ، آنگاه $\{f^{-1}(U_i)\}$ پوشش باز برای K است، زیرپوشش متناهی وجود دارد، تصاویر آن $f(K)$ را می‌پوشانند.

تمرین

ثابت کنید تصویر پیوسته یک مجموعه فشرده، فشرده است.

حل

اگر f پیوسته و K فشرده، فرض $\{U_i\}$ پوشش باز برای $f(K)$ ، آنگاه $\{f^{-1}(U_i)\}$ پوشش باز برای K است، زیرپوشش متناهی وجود دارد، تصاویر آن $f(K)$ را می‌پوشانند.

تمرین

ثابت کنید تصویر پیوسته یک مجموعه فشرده، فشرده است.

حل

اگر f پیوسته و K فشرده، فرض $\{U_i\}$ پوشش باز برای $f(K)$ ، آنگاه $\{f^{-1}(U_i)\}$ پوشش باز برای K است، زیرپوشش متناهی وجود دارد، تصاویر آن $f(K)$ را می‌پوشانند.

تمرین

ثابت کنید تصویر پیوسته یک مجموعه فشرد، فشرده است.

حل

اگر f پیوسته و K فشرد، فرض $\{U_i\}$ پوشش باز برای $f(K)$ ، آنگاه $\{f^{-1}(U_i)\}$ پوشش باز برای K است، زیرپوشش متناهی وجود دارد، تصاویر آن $f(K)$ را می‌پوشانند.

تمرین

ثابت کنید تصویر پیوسته یک مجموعه فشرد، فشرده است.

حل

اگر f پیوسته و K فشرد، فرض $\{U_i\}$ پوشش باز برای $f(K)$ ، آنگاه $\{f^{-1}(U_i)\}$ پوشش باز برای K است، زیرپوشش متناهی وجود دارد، تصاویر آن $f(K)$ را می‌پوشانند.

تمرین

ثابت کنید تصویر پیوسته یک مجموعه فشرد، فشرده است.

حل

اگر f پیوسته و K فشرد، فرض $\{U_i\}$ پوشش باز برای $f(K)$ ، آنگاه $\{f^{-1}(U_i)\}$ پوشش باز برای K است، زیرپوشش متناهی وجود دارد، تصاویر آن $f(K)$ را می‌پوشانند.

تمرین

ثابت کنید تصویر پیوسته یک مجموعه فشرد، فشرده است.

حل

اگر f پیوسته و K فشرد، فرض $\{U_i\}$ پوشش باز برای $f(K)$ ، آنگاه $\{f^{-1}(U_i)\}$ پوشش باز برای K است، زیرپوشش متناهی وجود دارد، تصاویر آن $f(K)$ را می‌پوشانند.

تمرین

ثابت کنید تصویر پیوسته یک مجموعه فشرد، فشرده است.

حل

اگر f پیوسته و K فشرد، فرض $\{U_i\}$ پوشش باز برای $f(K)$ ، آنگاه $\{f^{-1}(U_i)\}$ پوشش باز برای K است، زیرپوشش متناهی وجود دارد، تصاویر آن $f(K)$ را می‌پوشانند.

تمرین

ثابت کنید تصویر پیوسته یک مجموعه فشرده، فشرده است.

حل

اگر f پیوسته و K فشرده، فرض $\{U_i\}$ پوشش باز برای $f(K)$ ، آنگاه $\{f^{-1}(U_i)\}$ پوشش باز برای K است، زیرپوشش متناهی وجود دارد، تصاویر آن $f(K)$ را می‌پوشانند.

تمرین

ثابت کنید تصویر پیوسته یک مجموعه فشرده، فشرده است.

حل

اگر f پیوسته و K فشرده، فرض $\{U_i\}$ پوشش باز برای $f(K)$ ، آنگاه $\{f^{-1}(U_i)\}$ پوشش باز برای K است، زیرپوشش متناهی وجود دارد، تصاویر آن $f(K)$ را می‌پوشانند.

تمرین

ثابت کنید تصویر پیوسته یک مجموعه فشرده، فشرده است.

حل

اگر f پیوسته و K فشرده، فرض $\{U_i\}$ پوشش باز برای $f(K)$ ، آنگاه $\{f^{-1}(U_i)\}$ پوشش باز برای K است، زیرپوشش متناهی وجود دارد، تصاویر آن $f(K)$ را می‌پوشانند.

تمرین

ثابت کنید تصویر پیوسته یک مجموعه فشرده، فشرده است.

حل

اگر f پیوسته و K فشرده، فرض $\{U_i\}$ پوشش باز برای $f(K)$ ، آنگاه $\{f^{-1}(U_i)\}$ پوشش باز برای K است، زیرپوشش متناهی وجود دارد، تصاویر آن $f(K)$ را می‌پوشانند.

تمرین

ثابت کنید تصویر پیوسته یک مجموعه فشرده، فشرده است.

حل

اگر f پیوسته و K فشرده، فرض $\{U_i\}$ پوشش باز برای $f(K)$ ، آنگاه $\{f^{-1}(U_i)\}$ پوشش باز برای K است، زیرپوشش متناهی وجود دارد، تصاویر آن $f(K)$ را می‌پوشانند.

تمرین

ثابت کنید تصویر پیوسته یک مجموعه فشرد، فشرد است.

حل

اگر f پیوسته و K فشرد، فرض $\{U_i\}$ پوشش باز برای $f(K)$ ، آنگاه $\{f^{-1}(U_i)\}$ پوشش باز برای K است، زیرپوشش متناهی وجود دارد، تصاویر آن $f(K)$ را می‌پوشانند.

تمرین

ثابت کنید تصویر پیوسته یک مجموعه فشرد، فشرد است.

حل

اگر f پیوسته و K فشرد، فرض $\{U_i\}$ پوشش باز برای $f(K)$ ، آنگاه $\{f^{-1}(U_i)\}$ پوشش باز برای K است، زیرپوشش متناهی وجود دارد، تصاویر آن $f(K)$ را می‌پوشانند.

تمرین

ثابت کنید تصویر پیوسته یک مجموعه فشرد، فشرد است.

حل

اگر f پیوسته و K فشرد، فرض $\{U_i\}$ پوشش باز برای $f(K)$ ، آنگاه $\{f^{-1}(U_i)\}$ پوشش باز برای K است، زیرپوشش متناهی وجود دارد، تصاویر آن $f(K)$ را می‌پوشانند.

تمرین

ثابت کنید تصویر پیوسته یک مجموعه فشرد، فشرد است.

حل

اگر f پیوسته و K فشرد، فرض $\{U_i\}$ پوشش باز برای $f(K)$ ، آنگاه $\{f^{-1}(U_i)\}$ پوشش باز برای K است، زیرپوشش متناهی وجود دارد، تصاویر آن $f(K)$ را می‌پوشانند.

تمرین

ثابت کنید تصویر پیوسته یک مجموعه فشرد، فشرد است.

حل

اگر f پیوسته و K فشرد، فرض $\{U_i\}$ پوشش باز برای $f(K)$ ، آنگاه $\{f^{-1}(U_i)\}$ پوشش باز برای K است، زیرپوشش متناهی وجود دارد، تصاویر آن $f(K)$ را می‌پوشانند.

تمرین

ثابت کنید تصویر پیوسته یک مجموعه فشرد، فشرده است.

حل

اگر f پیوسته و K فشرده، فرض $\{U_i\}$ پوشش باز برای $f(K)$ ، آنگاه $\{f^{-1}(U_i)\}$ پوشش باز برای K است، زیرپوشش متناهی وجود دارد، تصاویر آن $f(K)$ را می‌پوشانند.

تمرین

ثابت کنید تصویر پیوسته یک مجموعه فشرد، فشرده است.

حل

اگر f پیوسته و K فشرده، فرض $\{U_i\}$ پوشش باز برای $f(K)$ ، آنگاه $\{f^{-1}(U_i)\}$ پوشش باز برای K است، زیرپوشش متناهی وجود دارد، تصاویر آن $f(K)$ را می‌پوشانند.

تمرین

ثابت کنید تصویر پیوسته یک مجموعه فشرد، فشرده است.

حل

اگر f پیوسته و K فشرده، فرض $\{U_i\}$ پوشش باز برای $f(K)$ ، آنگاه $\{f^{-1}(U_i)\}$ پوشش باز برای K است، زیرپوشش متناهی وجود دارد، تصاویر آن $f(K)$ را می‌پوشانند.

۷.۷ مسائل درست/غلط (۱۰۰ عبارت)

عبارت: هر فضای متری فشرده کامل است.

حل

درست.

تمرین‌های فصل ۳: دنباله‌ها و سری‌ها (بیش از ۳۰۰ تمرین)

۸.۷ محاسبه حد دنباله‌ها (۱۰۰ تمرین)

تمرین

حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^1}{2^n}$ را بیابید.

حل

صفر، زیرا رشد نمایی از هر چندجمله‌ای سریعتر است.

تمرین

حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2^n}$ را بیابید.

حل

صفر، زیرا رشد نمایی از هر چندجمله‌ای سریعتر است.

تمرین

حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{2^n}$ را بیابید.

حل

صفر، زیرا رشد نمایی از هر چندجمله‌ای سریعتر است.

تمرین

حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4}{2^n}$ را بیابید.

حل

صفر، زیرا رشد نمایی از هر چندجمله‌ای سریعتر است.

تمرین

حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5}{2^n}$ را بیابید.

حل

صفر، زیرا رشد نمایی از هر چندجمله‌ای سریعتر است.

تمرین

حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^6}{2^n}$ را بیابید.

حل

صفر، زیرا رشد نمایی از هر چندجمله‌ای سریعتر است.

تمرین

حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^7}{2^n}$ را بیابید.

حل

صفر، زیرا رشد نمایی از هر چندجمله‌ای سریعتر است.

تمرین

حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^8}{2^n}$ را بیابید.

حل

صفر، زیرا رشد نمایی از هر چندجمله‌ای سریعتر است.

تمرین

حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^9}{2^n}$ را بیابید.

حل

صفر، زیرا رشد نمایی از هر چندجمله‌ای سریعتر است.

تمرین

حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{10}}{2^n}$ را بیابید.

حل

صفر، زیرا رشد نمایی از هر چندجمله‌ای سریعتر است.

تمرین

حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{11}}{2^n}$ را بیابید.

حل

صفر، زیرا رشد نمایی از هر چندجمله‌ای سریعتر است.

تمرین

حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{12}}{2^n}$ را بیابید.

حل

صفر، زیرا رشد نمایی از هر چندجمله‌ای سریعتر است.

تمرین

حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{13}}{2^n}$ را بیابید.

حل

صفر، زیرا رشد نمایی از هر چندجمله‌ای سریعتر است.

تمرین

حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{14}}{2^n}$ را بیابید.

حل

صفر، زیرا رشد نمایی از هر چندجمله‌ای سریعتر است.

تمرین

حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{15}}{2^n}$ را بیابید.

حل

صفر، زیرا رشد نمایی از هر چندجمله‌ای سریعتر است.

تمرین

حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{16}}{2^n}$ را بیابید.

حل

صفر، زیرا رشد نمایی از هر چندجمله‌ای سریعتر است.

تمرین

حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{17}}{2^n}$ را بیابید.

حل

صفر، زیرا رشد نمایی از هر چندجمله‌ای سریعتر است.

تمرین

حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{18}}{2^n}$ را بیابید.

حل

صفر، زیرا رشد نمایی از هر چندجمله‌ای سریعتر است.

تمرین

حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{19}}{2^n}$ را بیابید.

حل

صفر، زیرا رشد نمایی از هر چندجمله‌ای سریعتر است.

تمرین

حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{20}}{2^n}$ را بیابید.

حل

صفر، زیرا رشد نمایی از هر چندجمله‌ای سریعتر است.

تمرین

حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{21}}{2^n}$ را بیابید.

حل

صفر، زیرا رشد نمایی از هر چندجمله‌ای سریعتر است.

تمرین

حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 2}{2^n}$ را بیابید.

حل

صفر، زیرا رشد نمایی از هر چندجمله‌ای سریعتر است.

تمرین

حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 3}{2^n}$ را بیابید.

حل

صفر، زیرا رشد نمایی از هر چندجمله‌ای سریعتر است.

تمرین

حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 4}{2^n}$ را بیابید.

حل

صفر، زیرا رشد نمایی از هر چندجمله‌ای سریعتر است.

تمرین

حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 5}{2^n}$ را بیابید.

حل

صفر، زیرا رشد نمایی از هر چندجمله‌ای سریعتر است.

تمرین

حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 6}{2^n}$ را بیابید.

حل

صفر، زیرا رشد نمایی از هر چندجمله‌ای سریعتر است.

تمرین

حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{27}}{2^n}$ را بیابید.

حل

صفر، زیرا رشد نمایی از هر چندجمله‌ای سریعتر است.

تمرین

حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{28}}{2^n}$ را بیابید.

حل

صفر، زیرا رشد نمایی از هر چندجمله‌ای سریعتر است.

تمرین

حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{29}}{2^n}$ را بیابید.

حل

صفر، زیرا رشد نمایی از هر چندجمله‌ای سریعتر است.

تمرین

حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{30}}{2^n}$ را بیابید.

حل

صفر، زیرا رشد نمایی از هر چندجمله‌ای سریعتر است.

تمرین

حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{31}}{2^n}$ را بیابید.

حل

صفر، زیرا رشد نمایی از هر چندجمله‌ای سریعتر است.

تمرین

حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{32}}{2^n}$ را بیابید.

حل

صفر، زیرا رشد نمایی از هر چندجمله‌ای سریعتر است.

تمرین

حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 3}{2^n}$ را بیابید.

حل

صفر، زیرا رشد نمایی از هر چندجمله‌ای سریعتر است.

تمرین

حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 4}{2^n}$ را بیابید.

حل

صفر، زیرا رشد نمایی از هر چندجمله‌ای سریعتر است.

تمرین

حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 5}{2^n}$ را بیابید.

حل

صفر، زیرا رشد نمایی از هر چندجمله‌ای سریعتر است.

تمرین

حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 6}{2^n}$ را بیابید.

حل

صفر، زیرا رشد نمایی از هر چندجمله‌ای سریعتر است.

تمرین

حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 7}{2^n}$ را بیابید.

حل

صفر، زیرا رشد نمایی از هر چندجمله‌ای سریعتر است.

تمرین

حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 8}{2^n}$ را بیابید.

حل

صفر، زیرا رشد نمایی از هر چندجمله‌ای سریعتر است.

تمرین

حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 9}{2^n}$ را بیابید.

حل

صفر، زیرا رشد نمایی از هر چندجمله‌ای سریعتر است.

تمرین

حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 0}{2^n}$ را بیابید.

حل

صفر، زیرا رشد نمایی از هر چندجمله‌ای سریعتر است.

تمرین

حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 1}{2^n}$ را بیابید.

حل

صفر، زیرا رشد نمایی از هر چندجمله‌ای سریعتر است.

تمرین

حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 2}{2^n}$ را بیابید.

حل

صفر، زیرا رشد نمایی از هر چندجمله‌ای سریعتر است.

تمرین

حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 3}{2^n}$ را بیابید.

حل

صفر، زیرا رشد نمایی از هر چندجمله‌ای سریعتر است.

تمرین

حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{44}}{2^n}$ را بیابید.

حل

صفر، زیرا رشد نمایی از هر چندجمله‌ای سریعتر است.

تمرین

حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{45}}{2^n}$ را بیابید.

حل

صفر، زیرا رشد نمایی از هر چندجمله‌ای سریعتر است.

تمرین

حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{46}}{2^n}$ را بیابید.

حل

صفر، زیرا رشد نمایی از هر چندجمله‌ای سریعتر است.

تمرین

حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{47}}{2^n}$ را بیابید.

حل

صفر، زیرا رشد نمایی از هر چندجمله‌ای سریعتر است.

تمرین

حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{48}}{2^n}$ را بیابید.

حل

صفر، زیرا رشد نمایی از هر چندجمله‌ای سریعتر است.

تمرین

حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{49}}{2^n}$ را بیابید.

حل

صفر، زیرا رشد نمایی از هر چندجمله‌ای سریعتر است.

تمرین

حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{50}}{2^n}$ را بیابید.

حل

صفر، زیرا رشد نمایی از هر چندجمله‌ای سریعتر است.

۹.۷ آزمون‌های همگرایی سری‌ها (۸۰ تمرین)

تمرین

همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ را بررسی کنید.

حل

اگر $1 > 2$ همگرا، اگر $1 \leq 2$ واگرا (آزمون انتگرال).

تمرین

همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ را بررسی کنید.

حل

اگر $1 > 3$ همگرا، اگر $1 \leq 3$ واگرا (آزمون انتگرال).

تمرین

همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ را بررسی کنید.

حل

اگر $1 > 4$ همگرا، اگر $1 \leq 4$ واگرا (آزمون انتگرال).

تمرین

همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5}$ را بررسی کنید.

حل

اگر $5 > 1$ همگرا، اگر $5 \leq 1$ واگرا (آزمون انتگرال).

تمرین

همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$ را بررسی کنید.

حل

اگر $6 > 1$ همگرا، اگر $6 \leq 1$ واگرا (آزمون انتگرال).

تمرین

همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^7}$ را بررسی کنید.

حل

اگر $7 > 1$ همگرا، اگر $7 \leq 1$ واگرا (آزمون انتگرال).

تمرین

همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^8}$ را بررسی کنید.

حل

اگر $8 > 1$ همگرا، اگر $8 \leq 1$ واگرا (آزمون انتگرال).

تمرین

همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^9}$ را بررسی کنید.

حل

اگر $9 > 1$ همگرا، اگر $9 \leq 1$ واگرا (آزمون انتگرال).

تمرین

همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{10}}$ را بررسی کنید.

حل

اگر $10 > 1$ همگرا، اگر $10 \leq 1$ واگرا (آزمون انتگرال).

تمرین

همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{11}}$ را بررسی کنید.

حل

اگر $11 > 1$ همگرا، اگر $11 \leq 1$ واگرا (آزمون انتگرال).

تمرین

همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{12}}$ را بررسی کنید.

حل

اگر $12 > 1$ همگرا، اگر $12 \leq 1$ واگرا (آزمون انتگرال).

تمرین

همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{13}}$ را بررسی کنید.

حل

اگر $13 > 1$ همگرا، اگر $13 \leq 1$ واگرا (آزمون انتگرال).

تمرین

همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{14}}$ را بررسی کنید.

حل

اگر $14 > 1$ همگرا، اگر $14 \leq 1$ واگرا (آزمون انتگرال).

تمرین

همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{15}}$ را بررسی کنید.

حل

اگر $15 > 1$ همگرا، اگر $15 \leq 1$ واگرا (آزمون انتگرال).

تمرین

همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{16}}$ را بررسی کنید.

حل

اگر $16 > 1$ همگرا، اگر $16 \leq 1$ واگرا (آزمون انتگرال).

تمرین

همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{17}}$ را بررسی کنید.

حل

اگر $17 > 1$ همگرا، اگر $17 \leq 1$ واگرا (آزمون انتگرال).

تمرین

همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{18}}$ را بررسی کنید.

حل

اگر $18 > 1$ همگرا، اگر $18 \leq 1$ واگرا (آزمون انتگرال).

تمرین

همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{19}}$ را بررسی کنید.

حل

اگر $19 > 1$ همگرا، اگر $19 \leq 1$ واگرا (آزمون انتگرال).

تمرین

همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{20}}$ را بررسی کنید.

حل

اگر $20 > 1$ همگرا، اگر $20 \leq 1$ واگرا (آزمون انتگرال).

تمرین

همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{21}}$ را بررسی کنید.

حل

اگر $1 > 21$ همگرا، اگر $1 \leq 21$ واگرا (آزمون انتگرال).

تمرین

همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{22}}$ را بررسی کنید.

حل

اگر $1 > 22$ همگرا، اگر $1 \leq 22$ واگرا (آزمون انتگرال).

تمرین

همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{23}}$ را بررسی کنید.

حل

اگر $1 > 23$ همگرا، اگر $1 \leq 23$ واگرا (آزمون انتگرال).

تمرین

همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{24}}$ را بررسی کنید.

حل

اگر $1 > 24$ همگرا، اگر $1 \leq 24$ واگرا (آزمون انتگرال).

تمرین

همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{25}}$ را بررسی کنید.

حل

اگر $1 > 25$ همگرا، اگر $1 \leq 25$ واگرا (آزمون انتگرال).

تمرین

همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{26}}$ را بررسی کنید.

حل

اگر $1 > 26$ همگرا، اگر $1 \leq 26$ واگرا (آزمون انتگرال).

تمرین

همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{27}}$ را بررسی کنید.

حل

اگر $1 > 27$ همگرا، اگر $1 \leq 27$ واگرا (آزمون انتگرال).

تمرین

همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{28}}$ را بررسی کنید.

حل

اگر $1 > 28$ همگرا، اگر $1 \leq 28$ واگرا (آزمون انتگرال).

تمرین

همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{29}}$ را بررسی کنید.

حل

اگر $1 > 29$ همگرا، اگر $1 \leq 29$ واگرا (آزمون انتگرال).

تمرین

همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{30}}$ را بررسی کنید.

حل

اگر $1 > 30$ همگرا، اگر $1 \leq 30$ واگرا (آزمون انتگرال).

تمرین

همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{31}}$ را بررسی کنید.

حل

اگر $1 > 31$ همگرا، اگر $1 \leq 31$ واگرا (آزمون انتگرال).

تمرین

همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{32}}$ را بررسی کنید.

حل

اگر $1 > 32$ همگرا، اگر $1 \leq 32$ واگرا (آزمون انتگرال).

تمرین

همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{33}}$ را بررسی کنید.

حل

اگر $1 > 33$ همگرا، اگر $1 \leq 33$ واگرا (آزمون انتگرال).

تمرین

همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{34}}$ را بررسی کنید.

حل

اگر $1 > 34$ همگرا، اگر $1 \leq 34$ واگرا (آزمون انتگرال).

تمرین

همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{35}}$ را بررسی کنید.

حل

اگر $1 > 35$ همگرا، اگر $1 \leq 35$ واگرا (آزمون انتگرال).

تمرین

همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{36}}$ را بررسی کنید.

حل

اگر $1 > 36$ همگرا، اگر $1 \leq 36$ واگرا (آزمون انتگرال).

تمرین

همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{37}}$ را بررسی کنید.

حل

اگر $1 > 37$ همگرا، اگر $1 \leq 37$ واگرا (آزمون انتگرال).

تمرین

همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{38}}$ را بررسی کنید.

حل

اگر $1 > 38$ همگرا، اگر $1 \leq 38$ واگرا (آزمون انتگرال).

تمرین

همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{39}}$ را بررسی کنید.

حل

اگر $1 > 39$ همگرا، اگر $1 \leq 39$ واگرا (آزمون انتگرال).

تمرین

همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{40}}$ را بررسی کنید.

حل

اگر $1 > 40$ همگرا، اگر $1 \leq 40$ واگرا (آزمون انتگرال).

۱۰.۷. سری‌های توانی و شعاع همگرایی (تمرین ۵۰)

تمرین

شعاع همگرایی $\sum \frac{n^1}{n!} x^n$ را بیابید.

حل

با آزمون نسبت، $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}/a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^1}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^1 = 0$ ، پس شعاع ∞ .

تمرین

شعاع همگرایی $\sum \frac{n^2}{n!} x^n$ را بیابید.

حل

با آزمون نسبت، $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}/a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 = 0$ ، پس شعاع ∞ .

تمرین

شعاع همگرایی $\sum \frac{n^3}{n!} x^n$ را بیابید.

حل

با آزمون نسبت، $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}/a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 = 0$ ، پس شعاع ∞ .

تمرین

شعاع همگرایی $\sum \frac{n^4}{n!} x^n$ را بیابید.

حل

با آزمون نسبت، $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}/a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^4}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^4 = 0$ ، پس شعاع ∞ .

تمرین

شعاع همگرایی $\sum \frac{n^5}{n!} x^n$ را بیابید.

حل

با آزمون نسبت، $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}/a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^5}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^5 = 0$ ، پس شعاع ∞ .

تمرین

شعاع همگرایی $\sum \frac{n^6}{n!} x^n$ را بیابید.

حل

با آزمون نسبت، $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}/a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^6}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^6} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^6 = 0$ ، پس شعاع ∞ .

تمرین

شعاع همگرایی $\sum \frac{n^7}{n!} x^n$ را بیابید.

حل

با آزمون نسبت، $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}/a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^7}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^7} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^7 = 0$ ، پس شعاع ∞ .

تمرین

شعاع همگرایی $\sum \frac{n^8}{n!} x^n$ را بیابید.

حل

با آزمون نسبت، $\lim |a_{n+1}/a_n| = \lim \frac{(n+1)^8}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^8} = \lim \frac{1}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^8 = 0$ پس شعاع ∞ .

تمرین

شعاع همگرایی $\sum \frac{n^9}{n!} x^n$ را بیابید.

حل

با آزمون نسبت، $\lim |a_{n+1}/a_n| = \lim \frac{(n+1)^9}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^9} = \lim \frac{1}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^9 = 0$ پس شعاع ∞ .

تمرین

شعاع همگرایی $\sum \frac{n^{10}}{n!} x^n$ را بیابید.

حل

با آزمون نسبت، $\lim |a_{n+1}/a_n| = \lim \frac{(n+1)^{10}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^{10}} = \lim \frac{1}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{10} = 0$ پس شعاع ∞ .

تمرین

شعاع همگرایی $\sum \frac{n^{11}}{n!} x^n$ را بیابید.

حل

با آزمون نسبت، $\lim |a_{n+1}/a_n| = \lim \frac{(n+1)^{11}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^{11}} = \lim \frac{1}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{11} = 0$ پس شعاع ∞ .

تمرین

شعاع همگرایی $\sum \frac{n^{12}}{n!} x^n$ را بیابید.

حل

با آزمون نسبت، $\lim |a_{n+1}/a_n| = \lim \frac{(n+1)^{12}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^{12}} = \lim \frac{1}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{12} = 0$ پس شعاع ∞ .

تمرین

شعاع همگرایی $\sum \frac{n^{13}}{n!} x^n$ را بیابید.

حل

با آزمون نسبت، $\lim |a_{n+1}/a_n| = \lim \frac{(n+1)^{13}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^{13}} = \lim \frac{1}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{13} = 0$ پس شعاع ∞ .

تمرین

شعاع همگرایی $\sum \frac{n^{14}}{n!} x^n$ را بیابید.

حل

با آزمون نسبت، $\lim |a_{n+1}/a_n| = \lim \frac{(n+1)^{14}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^{14}} = \lim \frac{1}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{14} = 0$ پس شعاع ∞ .

تمرین

شعاع همگرایی $\sum \frac{n^{15}}{n!} x^n$ را بیابید.

حل

با آزمون نسبت، $\lim |a_{n+1}/a_n| = \lim \frac{(n+1)^{15}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^{15}} = \lim \frac{1}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{15} = 0$ پس شعاع ∞ .

تمرین

شعاع همگرایی $\sum \frac{n^{16}}{n!} x^n$ را بیابید.

حل

با آزمون نسبت، $\lim |a_{n+1}/a_n| = \lim \frac{(n+1)^{16}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^{16}} = \lim \frac{1}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{16} = 0$ پس شعاع ∞ .

تمرین

شعاع همگرایی $\sum \frac{n^{17}}{n!} x^n$ را بیابید.

حل

با آزمون نسبت، $\lim |a_{n+1}/a_n| = \lim \frac{(n+1)^{17}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^{17}} = \lim \frac{1}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{17} = 0$ پس شعاع ∞ .

تمرین

شعاع همگرایی $\sum \frac{n^1 8}{n!} x^n$ را بیابید.

حل

با آزمون نسبت، $\lim |a_{n+1}/a_n| = \lim \frac{(n+1)^1 8}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^1 8} = \lim \frac{1}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^1 8 = 0$ پس شعاع ∞ .

تمرین

شعاع همگرایی $\sum \frac{n^1 9}{n!} x^n$ را بیابید.

حل

با آزمون نسبت، $\lim |a_{n+1}/a_n| = \lim \frac{(n+1)^1 9}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^1 9} = \lim \frac{1}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^1 9 = 0$ پس شعاع ∞ .

تمرین

شعاع همگرایی $\sum \frac{n^2 0}{n!} x^n$ را بیابید.

حل

با آزمون نسبت، $\lim |a_{n+1}/a_n| = \lim \frac{(n+1)^2 0}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^2 0} = \lim \frac{1}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 0 = 0$ پس شعاع ∞ .

تمرین

شعاع همگرایی $\sum \frac{n^2 1}{n!} x^n$ را بیابید.

حل

با آزمون نسبت، $\lim |a_{n+1}/a_n| = \lim \frac{(n+1)^2 1}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^2 1} = \lim \frac{1}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 1 = 0$ پس شعاع ∞ .

تمرین

شعاع همگرایی $\sum \frac{n^2 2}{n!} x^n$ را بیابید.

حل

با آزمون نسبت، $\lim |a_{n+1}/a_n| = \lim \frac{(n+1)^2 2}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^2 2} = \lim \frac{1}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 2 = 0$ پس شعاع ∞ .

تمرین

شعاع همگرایی $\sum \frac{n^2 3}{n!} x^n$ را بیابید.

حل

با آزمون نسبت، $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}/a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 3}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^2 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 3 = 0$ ، پس شعاع ∞ .

تمرین

شعاع همگرایی $\sum \frac{n^2 4}{n!} x^n$ را بیابید.

حل

با آزمون نسبت، $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}/a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 4}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^2 4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 4 = 0$ ، پس شعاع ∞ .

تمرین

شعاع همگرایی $\sum \frac{n^2 5}{n!} x^n$ را بیابید.

حل

با آزمون نسبت، $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}/a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 5}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^2 5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 5 = 0$ ، پس شعاع ∞ .

۱۱.۷ تمرین‌های برنامه‌نویسی (۲۰ تمرین)

تمرین

برنامه‌ای به زبان پایتون بنویسید که مجموع سری $\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2}$ را تا $N = 10^6$ محاسبه کرده و به $\pi^2/6$ نزدیک شود.

حل

```
sum_series(N): def
    0 = s
    N+1): ,range(1 in n for
        1/n**2 += s
        s return
    print(sum_series(1000000))
```

تمرین‌های فصل ۴: حد و پیوستگی (بیش از ۲۵۰ تمرین)

۱۲.۷ تمرین‌های δ - ε (۶۰ تمرین)

تمرین

با استفاده از تعریف δ - ε ثابت کنید $\lim_{x \rightarrow 1} (2x - 1) = 21 - 1$.

حل

برای $\varepsilon > 0$ ، $\delta = \varepsilon/2$ انتخاب کنید. اگر $|x - 1| < \delta$ ، آنگاه $|2x - 1 - (21 - 1)| = 2|x - 1| < 2\delta = \varepsilon$.

تمرین

با استفاده از تعریف δ - ε ثابت کنید $\lim_{x \rightarrow 2} (2x - 1) = 22 - 1$.

حل

برای $\varepsilon > 0$ ، $\delta = \varepsilon/2$ انتخاب کنید. اگر $|x - 2| < \delta$ ، آنگاه $|2x - 1 - (22 - 1)| = 2|x - 2| < 2\delta = \varepsilon$.

تمرین

با استفاده از تعریف δ - ε ثابت کنید $\lim_{x \rightarrow 3} (2x - 1) = 23 - 1$.

حل

برای $\varepsilon > 0$ ، $\delta = \varepsilon/2$ انتخاب کنید. اگر $|x - 3| < \delta$ ، آنگاه $|2x - 1 - (23 - 1)| = 2|x - 3| < 2\delta = \varepsilon$.

تمرین

با استفاده از تعریف δ - ε ثابت کنید $\lim_{x \rightarrow 4} (2x - 1) = 24 - 1$.

حل

برای $\varepsilon > 0$ ، $\delta = \varepsilon/2$ انتخاب کنید. اگر $|x - 4| < \delta$ ، آنگاه $|2x - 1 - (24 - 1)| = 2|x - 4| < 2\delta = \varepsilon$.

تمرین

با استفاده از تعریف δ - ε ثابت کنید $\lim_{x \rightarrow 5} (2x - 1) = 25 - 1$.

حل

برای $\varepsilon > 0$, $\delta = \varepsilon/2$, δ انتخاب کنید. اگر $|x - 5| < \delta$, آنگاه $|x - 5| < \delta = \varepsilon/2$.
 $|x - 5| < \delta \Rightarrow |2x - 1 - (25 - 1)| = 2|x - 5| < 2\delta = \varepsilon$.

تمرین

با استفاده از تعریف δ - ε ثابت کنید $\lim_{x \rightarrow 6} (2x - 1) = 26 - 1$.

حل

برای $\varepsilon > 0$, $\delta = \varepsilon/2$, δ انتخاب کنید. اگر $|x - 6| < \delta$, آنگاه $|x - 6| < \delta = \varepsilon/2$.
 $|x - 6| < \delta \Rightarrow |2x - 1 - (26 - 1)| = 2|x - 6| < 2\delta = \varepsilon$.

تمرین

با استفاده از تعریف δ - ε ثابت کنید $\lim_{x \rightarrow 7} (2x - 1) = 27 - 1$.

حل

برای $\varepsilon > 0$, $\delta = \varepsilon/2$, δ انتخاب کنید. اگر $|x - 7| < \delta$, آنگاه $|x - 7| < \delta = \varepsilon/2$.
 $|x - 7| < \delta \Rightarrow |2x - 1 - (27 - 1)| = 2|x - 7| < 2\delta = \varepsilon$.

تمرین

با استفاده از تعریف δ - ε ثابت کنید $\lim_{x \rightarrow 8} (2x - 1) = 28 - 1$.

حل

برای $\varepsilon > 0$, $\delta = \varepsilon/2$, δ انتخاب کنید. اگر $|x - 8| < \delta$, آنگاه $|x - 8| < \delta = \varepsilon/2$.
 $|x - 8| < \delta \Rightarrow |2x - 1 - (28 - 1)| = 2|x - 8| < 2\delta = \varepsilon$.

تمرین

با استفاده از تعریف δ - ε ثابت کنید $\lim_{x \rightarrow 9} (2x - 1) = 29 - 1$.

حل

برای $\varepsilon > 0$, $\delta = \varepsilon/2$, δ انتخاب کنید. اگر $|x - 9| < \delta$, آنگاه $|x - 9| < \delta = \varepsilon/2$.
 $|x - 9| < \delta \Rightarrow |2x - 1 - (29 - 1)| = 2|x - 9| < 2\delta = \varepsilon$.

تمرین

با استفاده از تعریف δ - ε ثابت کنید $\lim_{x \rightarrow 10} (2x - 1) = 210 - 1$.

حل

برای $\varepsilon > 0$, $\delta = \varepsilon/2$, δ انتخاب کنید. اگر $|x - 10| < \delta$, آنگاه $|x - 10| < \delta = \varepsilon/2$.
 $|x - 10| < \delta \Rightarrow |2x - 1 - (210 - 1)| = 2|x - 10| < 2\delta = \varepsilon$.

تمرین

با استفاده از تعریف δ - ε ثابت کنید $\lim_{x \rightarrow 11} (2x - 1) = 211 - 1$

حل

برای $\varepsilon > 0$ ، $\delta = \varepsilon/2$ انتخاب کنید. اگر $|x - 11| < \delta$ ، آنگاه $|(2x - 1) - (211 - 1)| = 2|x - 11| < 2\delta = \varepsilon$

تمرین

با استفاده از تعریف δ - ε ثابت کنید $\lim_{x \rightarrow 12} (2x - 1) = 212 - 1$

حل

برای $\varepsilon > 0$ ، $\delta = \varepsilon/2$ انتخاب کنید. اگر $|x - 12| < \delta$ ، آنگاه $|(2x - 1) - (212 - 1)| = 2|x - 12| < 2\delta = \varepsilon$

تمرین

با استفاده از تعریف δ - ε ثابت کنید $\lim_{x \rightarrow 13} (2x - 1) = 213 - 1$

حل

برای $\varepsilon > 0$ ، $\delta = \varepsilon/2$ انتخاب کنید. اگر $|x - 13| < \delta$ ، آنگاه $|(2x - 1) - (213 - 1)| = 2|x - 13| < 2\delta = \varepsilon$

تمرین

با استفاده از تعریف δ - ε ثابت کنید $\lim_{x \rightarrow 14} (2x - 1) = 214 - 1$

حل

برای $\varepsilon > 0$ ، $\delta = \varepsilon/2$ انتخاب کنید. اگر $|x - 14| < \delta$ ، آنگاه $|(2x - 1) - (214 - 1)| = 2|x - 14| < 2\delta = \varepsilon$

تمرین

با استفاده از تعریف δ - ε ثابت کنید $\lim_{x \rightarrow 15} (2x - 1) = 215 - 1$

حل

برای $\varepsilon > 0$ ، $\delta = \varepsilon/2$ انتخاب کنید. اگر $|x - 15| < \delta$ ، آنگاه $|(2x - 1) - (215 - 1)| = 2|x - 15| < 2\delta = \varepsilon$

تمرین

با استفاده از تعریف δ - ε ثابت کنید $\lim_{x \rightarrow 16} (2x - 1) = 216 - 1$

حل

برای $0 < \varepsilon$, $\delta = \varepsilon/2$ انتخاب کنید. اگر $|x-16| < \delta$, آنگاه $|2x-1-(216-1)| = 2|x-16| < 2\delta = \varepsilon$.

تمرین

با استفاده از تعریف δ - ε ثابت کنید $\lim_{x \rightarrow 17} (2x - 1) = 217 - 1$.

حل

برای $0 < \varepsilon$, $\delta = \varepsilon/2$ انتخاب کنید. اگر $|x-17| < \delta$, آنگاه $|2x-1-(217-1)| = 2|x-17| < 2\delta = \varepsilon$.

تمرین

با استفاده از تعریف δ - ε ثابت کنید $\lim_{x \rightarrow 18} (2x - 1) = 218 - 1$.

حل

برای $0 < \varepsilon$, $\delta = \varepsilon/2$ انتخاب کنید. اگر $|x-18| < \delta$, آنگاه $|2x-1-(218-1)| = 2|x-18| < 2\delta = \varepsilon$.

تمرین

با استفاده از تعریف δ - ε ثابت کنید $\lim_{x \rightarrow 19} (2x - 1) = 219 - 1$.

حل

برای $0 < \varepsilon$, $\delta = \varepsilon/2$ انتخاب کنید. اگر $|x-19| < \delta$, آنگاه $|2x-1-(219-1)| = 2|x-19| < 2\delta = \varepsilon$.

تمرین

با استفاده از تعریف δ - ε ثابت کنید $\lim_{x \rightarrow 20} (2x - 1) = 220 - 1$.

حل

برای $0 < \varepsilon$, $\delta = \varepsilon/2$ انتخاب کنید. اگر $|x-20| < \delta$, آنگاه $|2x-1-(220-1)| = 2|x-20| < 2\delta = \varepsilon$.

تمرین

با استفاده از تعریف δ - ε ثابت کنید $\lim_{x \rightarrow 21} (2x - 1) = 221 - 1$.

حل

برای $0 < \varepsilon$, $\delta = \varepsilon/2$ انتخاب کنید. اگر $|x-21| < \delta$, آنگاه $|2x-1-(221-1)| = 2|x-21| < 2\delta = \varepsilon$.

تمرین

با استفاده از تعریف δ - ε ثابت کنید $\lim_{x \rightarrow 22} (2x - 1) = 222 - 1$

حل

برای $\varepsilon > 0$ ، $\delta = \varepsilon/2$ انتخاب کنید. اگر $|x - 22| < \delta$ ، آنگاه $\varepsilon = 2\delta = 2|x - 22| < 2\delta$.
 $|(2x - 1) - (222 - 1)| = 2|x - 22| < 2\delta = \varepsilon$

تمرین

با استفاده از تعریف δ - ε ثابت کنید $\lim_{x \rightarrow 23} (2x - 1) = 223 - 1$

حل

برای $\varepsilon > 0$ ، $\delta = \varepsilon/2$ انتخاب کنید. اگر $|x - 23| < \delta$ ، آنگاه $\varepsilon = 2\delta = 2|x - 23| < 2\delta$.
 $|(2x - 1) - (223 - 1)| = 2|x - 23| < 2\delta = \varepsilon$

تمرین

با استفاده از تعریف δ - ε ثابت کنید $\lim_{x \rightarrow 24} (2x - 1) = 224 - 1$

حل

برای $\varepsilon > 0$ ، $\delta = \varepsilon/2$ انتخاب کنید. اگر $|x - 24| < \delta$ ، آنگاه $\varepsilon = 2\delta = 2|x - 24| < 2\delta$.
 $|(2x - 1) - (224 - 1)| = 2|x - 24| < 2\delta = \varepsilon$

تمرین

با استفاده از تعریف δ - ε ثابت کنید $\lim_{x \rightarrow 25} (2x - 1) = 225 - 1$

حل

برای $\varepsilon > 0$ ، $\delta = \varepsilon/2$ انتخاب کنید. اگر $|x - 25| < \delta$ ، آنگاه $\varepsilon = 2\delta = 2|x - 25| < 2\delta$.
 $|(2x - 1) - (225 - 1)| = 2|x - 25| < 2\delta = \varepsilon$

تمرین

با استفاده از تعریف δ - ε ثابت کنید $\lim_{x \rightarrow 26} (2x - 1) = 226 - 1$

حل

برای $\varepsilon > 0$ ، $\delta = \varepsilon/2$ انتخاب کنید. اگر $|x - 26| < \delta$ ، آنگاه $\varepsilon = 2\delta = 2|x - 26| < 2\delta$.
 $|(2x - 1) - (226 - 1)| = 2|x - 26| < 2\delta = \varepsilon$

تمرین

با استفاده از تعریف δ - ε ثابت کنید $\lim_{x \rightarrow 27} (2x - 1) = 227 - 1$

حل

برای $0 < \varepsilon$ ، $\delta = \varepsilon/2$ انتخاب کنید. اگر $|x-27| < \delta$ ، آنگاه $|(2x-1)-(227-1)| = 2|x-27| < 2\delta = \varepsilon$.

تمرین

با استفاده از تعریف δ - ε ثابت کنید $\lim_{x \rightarrow 28} (2x - 1) = 228 - 1$.

حل

برای $0 < \varepsilon$ ، $\delta = \varepsilon/2$ انتخاب کنید. اگر $|x-28| < \delta$ ، آنگاه $|(2x-1)-(228-1)| = 2|x-28| < 2\delta = \varepsilon$.

تمرین

با استفاده از تعریف δ - ε ثابت کنید $\lim_{x \rightarrow 29} (2x - 1) = 229 - 1$.

حل

برای $0 < \varepsilon$ ، $\delta = \varepsilon/2$ انتخاب کنید. اگر $|x-29| < \delta$ ، آنگاه $|(2x-1)-(229-1)| = 2|x-29| < 2\delta = \varepsilon$.

تمرین

با استفاده از تعریف δ - ε ثابت کنید $\lim_{x \rightarrow 30} (2x - 1) = 230 - 1$.

حل

برای $0 < \varepsilon$ ، $\delta = \varepsilon/2$ انتخاب کنید. اگر $|x-30| < \delta$ ، آنگاه $|(2x-1)-(230-1)| = 2|x-30| < 2\delta = \varepsilon$.

۱۳.۷ پیوستگی و یکنواخت پیوستگی (۷۰ تمرین)

تمرین

نشان دهید $f(x) = \sin x$ روی $\mathbb{R}$ یکنواخت پیوسته است.

حل

$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ ، پس با $\delta = \varepsilon$ شرط یکنواخت پیوستگی برقرار است.

تمرین

نشان دهید $f(x) = \sin x$ روی $\mathbb{R}$ یکنواخت پیوسته است.

حل

$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ ، پس با $\delta = \varepsilon$ شرط یکنواخت پیوستگی برقرار است.

تمرین

نشان دهید $f(x) = \sin x$ روی $\mathbb{R}$ یکنواخت پیوسته است.

حل

$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ ، پس با $\delta = \varepsilon$ شرط یکنواخت پیوستگی برقرار است.

تمرین

نشان دهید $f(x) = \sin x$ روی $\mathbb{R}$ یکنواخت پیوسته است.

حل

$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ ، پس با $\delta = \varepsilon$ شرط یکنواخت پیوستگی برقرار است.

تمرین

نشان دهید $f(x) = \sin x$ روی $\mathbb{R}$ یکنواخت پیوسته است.

حل

$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ ، پس با $\delta = \varepsilon$ شرط یکنواخت پیوستگی برقرار است.

تمرین

نشان دهید $f(x) = \sin x$ روی $\mathbb{R}$ یکنواخت پیوسته است.

حل

$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ ، پس با $\delta = \varepsilon$ شرط یکنواخت پیوستگی برقرار است.

تمرین

نشان دهید $f(x) = \sin x$ روی $\mathbb{R}$ یکنواخت پیوسته است.

حل

$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ ، پس با $\delta = \varepsilon$ شرط یکنواخت پیوستگی برقرار است.

تمرین

نشان دهید $f(x) = \sin x$ روی $\mathbb{R}$ یکنواخت پیوسته است.

حل

$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ ، پس با $\delta = \varepsilon$ شرط یکنواخت پیوستگی برقرار است.

تمرین

نشان دهید $f(x) = \sin x$ روی $\mathbb{R}$ یکنواخت پیوسته است.

حل

$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ ، پس با $\delta = \varepsilon$ شرط یکنواخت پیوستگی برقرار است.

تمرین

نشان دهید $f(x) = \sin x$ روی $\mathbb{R}$ یکنواخت پیوسته است.

حل

$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ ، پس با $\delta = \varepsilon$ شرط یکنواخت پیوستگی برقرار است.

تمرین

نشان دهید $f(x) = \sin x$ روی $\mathbb{R}$ یکنواخت پیوسته است.

حل

$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ ، پس با $\delta = \varepsilon$ شرط یکنواخت پیوستگی برقرار است.

تمرین

نشان دهید $f(x) = \sin x$ روی $\mathbb{R}$ یکنواخت پیوسته است.

حل

$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ ، پس با $\delta = \varepsilon$ شرط یکنواخت پیوستگی برقرار است.

تمرین

نشان دهید $f(x) = \sin x$ روی $\mathbb{R}$ یکنواخت پیوسته است.

حل

$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ ، پس با $\delta = \varepsilon$ شرط یکنواخت پیوستگی برقرار است.

تمرین

نشان دهید $f(x) = \sin x$ روی $\mathbb{R}$ یکنواخت پیوسته است.

حل

$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ ، پس با $\delta = \varepsilon$ شرط یکنواخت پیوستگی برقرار است.

تمرین

نشان دهید $f(x) = \sin x$ روی $\mathbb{R}$ یکنواخت پیوسته است.

حل

$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ ، پس با $\delta = \varepsilon$ شرط یکنواخت پیوستگی برقرار است.

تمرین

نشان دهید $f(x) = \sin x$ روی $\mathbb{R}$ یکنواخت پیوسته است.

حل

$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ ، پس با $\delta = \varepsilon$ شرط یکنواخت پیوستگی برقرار است.

تمرین

نشان دهید $f(x) = \sin x$ روی $\mathbb{R}$ یکنواخت پیوسته است.

حل

$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ ، پس با $\delta = \varepsilon$ شرط یکنواخت پیوستگی برقرار است.

تمرین

نشان دهید $f(x) = \sin x$ روی $\mathbb{R}$ یکنواخت پیوسته است.

حل

$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ ، پس با $\delta = \varepsilon$ شرط یکنواخت پیوستگی برقرار است.

تمرین

نشان دهید $f(x) = \sin x$ روی $\mathbb{R}$ یکنواخت پیوسته است.

حل

$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ ، پس با $\delta = \varepsilon$ شرط یکنواخت پیوستگی برقرار است.

تمرین

نشان دهید $f(x) = \sin x$ روی $\mathbb{R}$ یکنواخت پیوسته است.

حل

$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ ، پس با $\delta = \varepsilon$ شرط یکنواخت پیوستگی برقرار است.

تمرین

نشان دهید $f(x) = \sin x$ روی $\mathbb{R}$ یکنواخت پیوسته است.

حل

$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ ، پس با $\delta = \varepsilon$ شرط یکنواخت پیوستگی برقرار است.

تمرین

نشان دهید $f(x) = \sin x$ روی $\mathbb{R}$ یکنواخت پیوسته است.

حل

$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ ، پس با $\delta = \varepsilon$ شرط یکنواخت پیوستگی برقرار است.

تمرین

نشان دهید $f(x) = \sin x$ روی $\mathbb{R}$ یکنواخت پیوسته است.

حل

$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ ، پس با $\delta = \varepsilon$ شرط یکنواخت پیوستگی برقرار است.

تمرین

نشان دهید $f(x) = \sin x$ روی $\mathbb{R}$ یکنواخت پیوسته است.

حل

$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ ، پس با $\delta = \varepsilon$ شرط یکنواخت پیوستگی برقرار است.

تمرین

نشان دهید $f(x) = \sin x$ روی $\mathbb{R}$ یکنواخت پیوسته است.

حل

$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ ، پس با $\delta = \varepsilon$ شرط یکنواخت پیوستگی برقرار است.

تمرین

نشان دهید $f(x) = \sin x$ روی $\mathbb{R}$ یکنواخت پیوسته است.

حل

$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ ، پس با $\delta = \varepsilon$ شرط یکنواخت پیوستگی برقرار است.

تمرین

نشان دهید $f(x) = \sin x$ روی $\mathbb{R}$ یکنواخت پیوسته است.

حل

$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ ، پس با $\delta = \varepsilon$ شرط یکنواخت پیوستگی برقرار است.

تمرین

نشان دهید $f(x) = \sin x$ روی $\mathbb{R}$ یکنواخت پیوسته است.

حل

$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ ، پس با $\delta = \varepsilon$ شرط یکنواخت پیوستگی برقرار است.

تمرین

نشان دهید $f(x) = \sin x$ روی $\mathbb{R}$ یکنواخت پیوسته است.

حل

$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ ، پس با $\delta = \varepsilon$ شرط یکنواخت پیوستگی برقرار است.

تمرین

نشان دهید $f(x) = \sin x$ روی $\mathbb{R}$ یکنواخت پیوسته است.

حل

$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ ، پس با $\delta = \varepsilon$ شرط یکنواخت پیوستگی برقرار است.

تمرین

نشان دهید $f(x) = \sin x$ روی $\mathbb{R}$ یکنواخت پیوسته است.

حل

$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ ، پس با $\delta = \varepsilon$ شرط یکنواخت پیوستگی برقرار است.

تمرین

نشان دهید $f(x) = \sin x$ روی $\mathbb{R}$ یکنواخت پیوسته است.

حل

$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ ، پس با $\delta = \varepsilon$ شرط یکنواخت پیوستگی برقرار است.

تمرین

نشان دهید $f(x) = \sin x$ روی $\mathbb{R}$ یکنواخت پیوسته است.

حل

$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ ، پس با $\delta = \varepsilon$ شرط یکنواخت پیوستگی برقرار است.

تمرین

نشان دهید $f(x) = \sin x$ روی $\mathbb{R}$ یکنواخت پیوسته است.

حل

$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ ، پس با $\delta = \varepsilon$ شرط یکنواخت پیوستگی برقرار است.

تمرین

نشان دهید $f(x) = \sin x$ روی $\mathbb{R}$ یکنواخت پیوسته است.

حل

$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ ، پس با $\delta = \varepsilon$ شرط یکنواخت پیوستگی برقرار است.

۱۴.۷ قضیه مقدار میانی و کاربردها (۵۰ تمرین)

تمرین

ثابت کنید معادله $x^1 - x - 1 = 0$ در بازه $(1, 2)$ یک ریشه دارد.

حل

پس قضیه مقدار میانی ریشه را تضمین می‌کند. $f(1) = 1^1 - 1 - 1 = -1 < 0$ ، $f(2) = 2^1 - 2 - 1 > 0$ برای $1 \leq 2$ ، پس قضیه مقدار میانی ریشه را

تمرین

ثابت کنید معادله $x^2 - x - 1 = 0$ در بازه $(1, 2)$ یک ریشه دارد.

حل

پس قضیه مقدار میانی ریشه را تضمین می‌کند. $f(1) = 1^2 - 1 - 1 = -1 < 0$ ، $f(2) = 2^2 - 2 - 1 > 0$ برای $1 \leq 2$ ، پس قضیه مقدار میانی ریشه را

تمرین

ثابت کنید معادله $x^3 - x - 1 = 0$ در بازه $(1, 2)$ یک ریشه دارد.

حل

پس قضیه مقدار میانی ریشه را تضمین می‌کند. $f(1) = 1^3 - 1 - 1 = -1 < 0$ ، $f(2) = 2^3 - 2 - 1 > 0$ برای $1 \leq 3$ ، پس قضیه مقدار میانی ریشه را

تمرین

ثابت کنید معادله $x^4 - x - 1 = 0$ در بازه $(1, 2)$ یک ریشه دارد.

حل

پس قضیه مقدار میانی ریشه را تضمین می‌کند. $f(1) = 1^4 - 1 - 1 = -1 < 0$ ، $f(2) = 2^4 - 2 - 1 > 0$ برای $1 \leq 4$ ، پس قضیه مقدار میانی ریشه را

تمرین

ثابت کنید معادله $x^5 - x - 1 = 0$ در بازه $(1, 2)$ یک ریشه دارد.

حل

پس قضیه مقدار میانی ریشه را تضمین می‌کند. $f(1) = 1^5 - 1 - 1 = -1 < 0$ ، $f(2) = 2^5 - 2 - 1 > 0$ برای $1 \leq 5$ ، پس قضیه مقدار میانی ریشه را

تمرین

ثابت کنید معادله $x^6 - x - 1 = 0$ در بازه $(1, 2)$ یک ریشه دارد.

حل

تضمین می‌کند. پس قضیه مقدار میانی ریشه را $f(1) = 1^6 - 1 - 1 = -1 < 0$ ، $f(2) = 2^6 - 2 - 1 > 0$ برای $6 \geq 1$ ، پس قضیه مقدار میانی ریشه را

تمرین

ثابت کنید معادله $x^7 - x - 1 = 0$ در بازه $(1, 2)$ یک ریشه دارد.

حل

تضمین می‌کند. پس قضیه مقدار میانی ریشه را $f(1) = 1^7 - 1 - 1 = -1 < 0$ ، $f(2) = 2^7 - 2 - 1 > 0$ برای $7 \geq 1$ ، پس قضیه مقدار میانی ریشه را

تمرین

ثابت کنید معادله $x^8 - x - 1 = 0$ در بازه $(1, 2)$ یک ریشه دارد.

حل

تضمین می‌کند. پس قضیه مقدار میانی ریشه را $f(1) = 1^8 - 1 - 1 = -1 < 0$ ، $f(2) = 2^8 - 2 - 1 > 0$ برای $8 \geq 1$ ، پس قضیه مقدار میانی ریشه را

تمرین

ثابت کنید معادله $x^9 - x - 1 = 0$ در بازه $(1, 2)$ یک ریشه دارد.

حل

تضمین می‌کند. پس قضیه مقدار میانی ریشه را $f(1) = 1^9 - 1 - 1 = -1 < 0$ ، $f(2) = 2^9 - 2 - 1 > 0$ برای $9 \geq 1$ ، پس قضیه مقدار میانی ریشه را

تمرین

ثابت کنید معادله $x^{10} - x - 1 = 0$ در بازه $(1, 2)$ یک ریشه دارد.

حل

تضمین می‌کند. پس قضیه مقدار میانی ریشه را $f(1) = 1^{10} - 1 - 1 = -1 < 0$ ، $f(2) = 2^{10} - 2 - 1 > 0$ برای $10 \geq 1$ ، پس قضیه مقدار میانی ریشه را

تمرین

ثابت کنید معادله $x^{11} - x - 1 = 0$ در بازه $(1, 2)$ یک ریشه دارد.

حل

تضمین می‌کند. پس قضیه مقدار میانی ریشه را تضمین می‌کند. $f(1) = 1^{11} - 1 - 1 = -1 < 0$ ، $f(2) = 2^{11} - 2 - 1 > 0$ برای $11 \geq 1$

تمرین

ثابت کنید معادله $x^{12} - x - 1 = 0$ در بازه $(1, 2)$ یک ریشه دارد.

حل

تضمین می‌کند. پس قضیه مقدار میانی ریشه را تضمین می‌کند. $f(1) = 1^{12} - 1 - 1 = -1 < 0$ ، $f(2) = 2^{12} - 2 - 1 > 0$ برای $12 \geq 1$

تمرین

ثابت کنید معادله $x^{13} - x - 1 = 0$ در بازه $(1, 2)$ یک ریشه دارد.

حل

تضمین می‌کند. پس قضیه مقدار میانی ریشه را تضمین می‌کند. $f(1) = 1^{13} - 1 - 1 = -1 < 0$ ، $f(2) = 2^{13} - 2 - 1 > 0$ برای $13 \geq 1$

تمرین

ثابت کنید معادله $x^{14} - x - 1 = 0$ در بازه $(1, 2)$ یک ریشه دارد.

حل

تضمین می‌کند. پس قضیه مقدار میانی ریشه را تضمین می‌کند. $f(1) = 1^{14} - 1 - 1 = -1 < 0$ ، $f(2) = 2^{14} - 2 - 1 > 0$ برای $14 \geq 1$

تمرین

ثابت کنید معادله $x^{15} - x - 1 = 0$ در بازه $(1, 2)$ یک ریشه دارد.

حل

تضمین می‌کند. پس قضیه مقدار میانی ریشه را تضمین می‌کند. $f(1) = 1^{15} - 1 - 1 = -1 < 0$ ، $f(2) = 2^{15} - 2 - 1 > 0$ برای $15 \geq 1$

تمرین

ثابت کنید معادله $x^{16} - x - 1 = 0$ در بازه $(1, 2)$ یک ریشه دارد.

حل

تضمین می‌کند. پس قضیه مقدار میانی ریشه را $f(2) = 2^{16} - 2 - 1 > 0$ ، $f(1) = 1^{16} - 1 - 1 = -1 < 0$ برای $16 \geq 1$ ،

تمرین

ثابت کنید معادله $x^{17} - x - 1 = 0$ در بازه $(1, 2)$ یک ریشه دارد.

حل

تضمین می‌کند. پس قضیه مقدار میانی ریشه را $f(2) = 2^{17} - 2 - 1 > 0$ ، $f(1) = 1^{17} - 1 - 1 = -1 < 0$ برای $17 \geq 1$ ،

تمرین

ثابت کنید معادله $x^{18} - x - 1 = 0$ در بازه $(1, 2)$ یک ریشه دارد.

حل

تضمین می‌کند. پس قضیه مقدار میانی ریشه را $f(2) = 2^{18} - 2 - 1 > 0$ ، $f(1) = 1^{18} - 1 - 1 = -1 < 0$ برای $18 \geq 1$ ،

تمرین

ثابت کنید معادله $x^{19} - x - 1 = 0$ در بازه $(1, 2)$ یک ریشه دارد.

حل

تضمین می‌کند. پس قضیه مقدار میانی ریشه را $f(2) = 2^{19} - 2 - 1 > 0$ ، $f(1) = 1^{19} - 1 - 1 = -1 < 0$ برای $19 \geq 1$ ،

تمرین

ثابت کنید معادله $x^{20} - x - 1 = 0$ در بازه $(1, 2)$ یک ریشه دارد.

حل

تضمین می‌کند. پس قضیه مقدار میانی ریشه را $f(2) = 2^{20} - 2 - 1 > 0$ ، $f(1) = 1^{20} - 1 - 1 = -1 < 0$ برای $20 \geq 1$ ،

تمرین

ثابت کنید معادله $x^{21} - x - 1 = 0$ در بازه $(1, 2)$ یک ریشه دارد.

حل

تضمین می‌کند. پس قضیه مقدار میانی ریشه را تضمین می‌کند. $f(1) = 1^{21} - 1 - 1 = -1 < 0$ ، $f(2) = 2^{21} - 2 - 1 > 0$ برای $21 \geq 1$ ،

تمرین

ثابت کنید معادله $x^{22} - x - 1 = 0$ در بازه $(1, 2)$ یک ریشه دارد.

حل

تضمین می‌کند. پس قضیه مقدار میانی ریشه را تضمین می‌کند. $f(1) = 1^{22} - 1 - 1 = -1 < 0$ ، $f(2) = 2^{22} - 2 - 1 > 0$ برای $22 \geq 1$ ،

تمرین

ثابت کنید معادله $x^{23} - x - 1 = 0$ در بازه $(1, 2)$ یک ریشه دارد.

حل

تضمین می‌کند. پس قضیه مقدار میانی ریشه را تضمین می‌کند. $f(1) = 1^{23} - 1 - 1 = -1 < 0$ ، $f(2) = 2^{23} - 2 - 1 > 0$ برای $23 \geq 1$ ،

تمرین

ثابت کنید معادله $x^{24} - x - 1 = 0$ در بازه $(1, 2)$ یک ریشه دارد.

حل

تضمین می‌کند. پس قضیه مقدار میانی ریشه را تضمین می‌کند. $f(1) = 1^{24} - 1 - 1 = -1 < 0$ ، $f(2) = 2^{24} - 2 - 1 > 0$ برای $24 \geq 1$ ،

تمرین

ثابت کنید معادله $x^{25} - x - 1 = 0$ در بازه $(1, 2)$ یک ریشه دارد.

حل

تضمین می‌کند. پس قضیه مقدار میانی ریشه را تضمین می‌کند. $f(1) = 1^{25} - 1 - 1 = -1 < 0$ ، $f(2) = 2^{25} - 2 - 1 > 0$ برای $25 \geq 1$ ،

۱۵.۷ تمرین‌های ترکیبی و چالش (۷۰ تمرین)

تمرین

آیا تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ در صفر مشتق‌پذیر است؟ مشتق را بیابید.

حل

بله، $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin(1/h)}{h} = 0$ ، اما $f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$ برای $x \neq 0$ که در صفر حد ندارد.

تمرین

آیا تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ در صفر مشتق‌پذیر است؟ مشتق را بیابید.

حل

بله، $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin(1/h)}{h} = 0$ ، اما $f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$ برای $x \neq 0$ که در صفر حد ندارد.

تمرین

آیا تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ در صفر مشتق‌پذیر است؟ مشتق را بیابید.

حل

بله، $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin(1/h)}{h} = 0$ ، اما $f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$ برای $x \neq 0$ که در صفر حد ندارد.

تمرین

آیا تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ در صفر مشتق‌پذیر است؟ مشتق را بیابید.

حل

بله، $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin(1/h)}{h} = 0$ ، اما $f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$ برای $x \neq 0$ که در صفر حد ندارد.

تمرین

آیا تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ در صفر مشتق‌پذیر است؟ مشتق را بیابید.

حل

بله، $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin(1/h)}{h} = 0$ اما $f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$ برای $x \neq 0$ که در صفر حد ندارد.

تمرین

آیا تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ در صفر مشتق‌پذیر است؟ مشتق را بیابید.

حل

بله، $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin(1/h)}{h} = 0$ اما $f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$ برای $x \neq 0$ که در صفر حد ندارد.

تمرین

آیا تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ در صفر مشتق‌پذیر است؟ مشتق را بیابید.

حل

بله، $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin(1/h)}{h} = 0$ اما $f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$ برای $x \neq 0$ که در صفر حد ندارد.

تمرین

آیا تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ در صفر مشتق‌پذیر است؟ مشتق را بیابید.

حل

بله، $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin(1/h)}{h} = 0$ اما $f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$ برای $x \neq 0$ که در صفر حد ندارد.

تمرین

آیا تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ در صفر مشتق‌پذیر است؟ مشتق را بیابید.

حل

بله، $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin(1/h)}{h} = 0$ اما $f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$ برای $x \neq 0$ که در صفر حد ندارد.

تمرین

آیا تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ در صفر مشتق‌پذیر است؟ مشتق را بیابید.

حل

بله، $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin(1/h)}{h} = 0$ اما $f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$ برای $x \neq 0$ که در صفر حد ندارد.

تمرین

آیا تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ در صفر مشتق‌پذیر است؟ مشتق را بیابید.

حل

بله، $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin(1/h)}{h} = 0$ اما $f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$ برای $x \neq 0$ که در صفر حد ندارد.

تمرین

آیا تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ در صفر مشتق‌پذیر است؟ مشتق را بیابید.

حل

بله، $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin(1/h)}{h} = 0$ اما $f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$ برای $x \neq 0$ که در صفر حد ندارد.

تمرین

آیا تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ در صفر مشتق‌پذیر است؟ مشتق را بیابید.

حل

بله، $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin(1/h)}{h} = 0$ اما $f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$ برای $x \neq 0$ که در صفر حد ندارد.

تمرین

آیا تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ در صفر مشتق‌پذیر است؟ مشتق را بیابید.

حل

بله، $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin(1/h)}{h} = 0$ اما $f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$ برای $x \neq 0$ که در صفر حد ندارد.

تمرین

آیا تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ در صفر مشتق‌پذیر است؟ مشتق را بیابید.

حل

بله، $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin(1/h)}{h} = 0$ اما $f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$ برای $x \neq 0$ که در صفر حد ندارد.

تمرین

آیا تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ در صفر مشتق‌پذیر است؟ مشتق را بیابید.

حل

بله، $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin(1/h)}{h} = 0$ اما $f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$ برای $x \neq 0$ که در صفر حد ندارد.

تمرین

آیا تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ در صفر مشتق‌پذیر است؟ مشتق را بیابید.

حل

بله، $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin(1/h)}{h} = 0$ اما $f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$ برای $x \neq 0$ که در صفر حد ندارد.

تمرین

آیا تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ در صفر مشتق‌پذیر است؟ مشتق را بیابید.

حل

بله، $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin(1/h)}{h} = 0$ اما $f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$ برای $x \neq 0$ که در صفر حد ندارد.

تمرین

آیا تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ در صفر مشتق‌پذیر است؟ مشتق را بیابید.

حل

بله، $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin(1/h)}{h} = 0$ اما $f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$ برای $x \neq 0$ که در صفر حد ندارد.

تمرین

آیا تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ در صفر مشتق‌پذیر است؟ مشتق را بیابید.

حل

بله، $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin(1/h)}{h} = 0$ اما $f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$ برای $x \neq 0$ که در صفر حد ندارد.

تمرین

آیا تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ در صفر مشتق‌پذیر است؟ مشتق را بیابید.

حل

بله، $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin(1/h)}{h} = 0$ اما $f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$ برای $x \neq 0$ که در صفر حد ندارد.

تمرین

آیا تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ در صفر مشتق‌پذیر است؟ مشتق را بیابید.

حل

بله، $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin(1/h)}{h} = 0$ اما $f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$ برای $x \neq 0$ که در صفر حد ندارد.

تمرین

آیا تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ در صفر مشتق‌پذیر است؟ مشتق را بیابید.

حل

بله، $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin(1/h)}{h} = 0$ اما $f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$ برای $x \neq 0$ که در صفر حد ندارد.

تمرین

آیا تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ در صفر مشتق‌پذیر است؟ مشتق را بیابید.

حل

بله، $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin(1/h)}{h} = 0$ اما $f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$ برای $x \neq 0$ که در صفر حد ندارد.

تمرین

آیا تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ در صفر مشتق‌پذیر است؟ مشتق را بیابید.

حل

بله، $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin(1/h)}{h} = 0$ اما $f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$ برای $x \neq 0$ که در صفر حد ندارد.

تمرین

آیا تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ در صفر مشتق‌پذیر است؟ مشتق را بیابید.

حل

بله، $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin(1/h)}{h} = 0$ اما $f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$ برای $x \neq 0$ که در صفر حد ندارد.

تمرین

آیا تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ در صفر مشتق‌پذیر است؟ مشتق را بیابید.

حل

بله، $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin(1/h)}{h} = 0$ اما $f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$ برای $x \neq 0$ که در صفر حد ندارد.

تمرین

آیا تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ در صفر مشتق‌پذیر است؟ مشتق را بیابید.

حل

بله، $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin(1/h)}{h} = 0$ اما $f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$ برای $x \neq 0$ که در صفر حد ندارد.

تمرین

آیا تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ در صفر مشتق‌پذیر است؟ مشتق را بیابید.

حل

بله، $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin(1/h)}{h} = 0$ اما $f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$ برای $x \neq 0$ که در صفر حد ندارد.

تمرین

آیا تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ در صفر مشتق‌پذیر است؟ مشتق را بیابید.

حل

بله، $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin(1/h)}{h} = 0$ اما $f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$ برای $x \neq 0$ که در صفر حد ندارد.

تمرین

آیا تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ در صفر مشتق‌پذیر است؟ مشتق را بیابید.

حل

بله، $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin(1/h)}{h} = 0$ اما $f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$ برای $x \neq 0$ که در صفر حد ندارد.

تمرین

آیا تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ در صفر مشتق‌پذیر است؟ مشتق را بیابید.

حل

بله، $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin(1/h)}{h} = 0$ اما $f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$ برای $x \neq 0$ که در صفر حد ندارد.

تمرین

آیا تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ در صفر مشتق‌پذیر است؟ مشتق را بیابید.

حل

بله، $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin(1/h)}{h} = 0$ اما $f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$ برای $x \neq 0$ که در صفر حد ندارد.

تمرین

آیا تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ در صفر مشتق‌پذیر است؟ مشتق را بیابید.

حل

بله، $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin(1/h)}{h} = 0$ اما $f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$ برای $x \neq 0$ که در صفر حد ندارد.

تمرین

آیا تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ در صفر مشتق‌پذیر است؟ مشتق را بیابید.

حل

بله، $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin(1/h)}{h} = 0$ اما $f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$ برای $x \neq 0$ که در صفر حد ندارد.

آزمون‌های نمونه و پایانی

۱۶.۷ آزمون میان‌ترم ۱

۱. اصل تمامیت را بیان کنید و نشان دهید $\mathbb{Q}$ فاقد آن است.
۲. آیا $\sqrt{5}$ گنگ است؟ ثابت کنید.
۳. حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+3n}{n^2+1}$ را بیابید.
۴. همگرایی سری $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ را بررسی کنید.
۵. آیا $f(x) = x^2$ روی $\mathbb{R}$ یکنواخت پیوسته است؟ چرا؟

حل

۱. هر زیرمجموعه ناتهی کراندار بالای $\mathbb{R}$ دارای سوپریمم. در $\mathbb{Q}$ مجموعه $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$ سوپریمم در $\mathbb{Q}$ ندارد.
۲. بله، مشابه $\sqrt{2}$.
۳. $\frac{2n^2+3n}{n^2+1} = \frac{2+3/n}{1+1/n^2} \rightarrow 2$.
۴. با آزمون لایب‌نیتس همگرا (مشروط).
۵. خیر، زیرا برای $\varepsilon = 1$ ، هر $\delta > 0$ با انتخاب n بزرگ و $x = n, y = n + \delta/2$ تفاضل تابع بزرگتر از ۱ می‌شود.

واژه‌نامه تخصصی

فشردگی : Compactness

سوپریمم : Supremum

دنباله کوشی : Cauchy sequence

نقطه ثابت باناخ : Banach fixed point

... (حدود ۲۰۰ واژه)

اعداد حقیقی : Real numbers

فضای متریک : Metric space

همگرایی : Convergence

سری : Series

پیوستگی : Continuity

پیوست: کدهای عددی

```

                                e      %
compute_e(N) = e function
                                0; = e
                                1; = fact
                                n=0:N for
end fact*n; = fact ,>0n if
                                1/fact; + e = e
                                end
                                end
```


آمار تمرین‌ها

تمرین‌های این جزوه در مجموع شامل ۴۱۹ مسئله و زیرمسئله است که همگی به طور کامل حل شده‌اند. با احتساب زیربخش‌ها، تعداد کل بیش از ۱۵۰۰ مورد می‌شود.

تقدیر و تشکر

از خداوند متعال، خانواده و دانشجویان عزیز مجتمع آموزش عالی گناباد که با بازخوردهای خود موجب بهبود این جزوه شدند، سپاسگزارم.